Sup MPSI, Lycée Jean Perrin, 2023-2024.

DS 4, Durée 2 h 30, Calculatrices interdites.

Exercice 1

On pose, si $n \in \mathbb{N}$: $f_n(x) = x^5 + nx$.

1. Montrer que si $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $\lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que $f_n(\lambda_n) = 1$.
2. Montrer que la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0.
3. Quelle est la limite de la suite $(n\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 2

On considère la fonction définie par $f(x) = x^2/2 - 2x + 4$ et les suites définies par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étudier pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f(x)$ et le signe de $f(x) - x$.
2. Représenter sur un même graphique la fonction f et la droite $y = x$.
3. Si $u_0 \in]2, 4[$, étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et préciser sa limite.
4. Si $u_0 > 4$, étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et préciser sa limite.
5. Si $u_0 \in]0, 2[$, que peut-on dire de u_1 ? Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
6. Si $u_0 < 0$, procéder comme à la question précédente pour étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et préciser sa limite.

Exercice 3

On considère les suites $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $i_0 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $e_0 = 3\sqrt{3}$ et , pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$e_{n+1} = \frac{2e_n i_n}{e_n + i_n} \text{ et } i_{n+1} = \sqrt{i_n \times e_{n+1}}$$

On admettra que ces suites sont bien définies et strictement positives.

1. Montrer que, si $n \in \mathbb{N}$:

   $$i_n \leq i_{n+1} \leq e_{n+1} \leq e_n$$

   On pourra commencer par montrer que si $0 < a < b$ alors si on pose $b' = \frac{2ab}{a+b}$ et $a' = \sqrt{ab'}$ alors : $a < a' < b' < b$.

2. Montrer que $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

   Leur limite commune est le nombre π ce qu'on ne demande pas de vérifier ici.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

   $$e_n - i_n \leq \frac{1}{2^n}(e_0 - i_0)$$

Exercice 4

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ et on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

On note enfin ϕ la racine positive de l'équation $x^2 = x + 1$.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et est strictement positif.
2. Donner, sous forme de fractions, les valeurs de u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4 ; u_5.
3. Démontrer que, pour tout entier naturel n, u_n est un nombre rationnel.
4. Représenter sur un même graphique la fonction f, le nombre ϕ et les six premières valeurs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *On peut utiliser le fait que* $\phi \simeq 1,62$
5. Si on suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, quelle est la valeur de sa limite ?
6. Démontrer que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par ϕ et que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par ϕ.
7. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

   On définit deux suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $p_0 = q_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$\begin{cases} p_{n+1} = p_n + q_n \\ q_{n+1} = p_n \end{cases}$$

   On admet que, pour tout entier naturel n, p_n et q_n sont bien définis et sont des nombres entiers strictement positifs.

8. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^n$.
9. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $\frac{p_n}{q_n}$ est la fraction irréductible égale à u_n.
10. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $|u_n - \phi| \leq \frac{1}{2^n}$.