Sup MPSI, Lycée Jean Perrin, 2023-2024.

DS 4, Correction rapide.

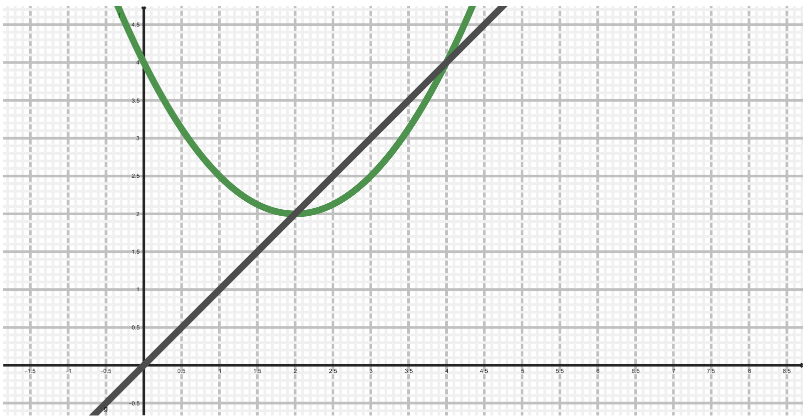
Exercice 1

On pose, si $n \in \mathbb{N}$: $f_n(x) = x^5 + nx$.

1. $n \in \mathbb{N}$: par stricte croissance de f_n sur $\mathbb{R}$, il existe un unique $\lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que $f_n(\lambda_n) = 1$.
2. On observe que $0 < \lambda_n < 1$.
   Ceci entraine que à $x > 0$ fixé, $f_n(x)$ croit avec n et que la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   Elle admet une limite $l \in [0, 1[$ qui vérifie (en divisant f_n par n) : $\lambda_n \to 0$.
3. En reportant dans la définition de λ_n : $n\lambda_n \to 1$.

Exercice 2

On considère la fonction définie par $f(x) = x^2/2 - 2x + 4$ et les suites définies par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. cf graphique
2. 
3. Si $u_0 \in]2, 4[$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 2.
4. Si $u_0 > 4$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et tend vers $+\infty$.
5. Si $u_0 \in]0, 2[$, $u_1 \in]2, 4[$, (u_n) est décroissante à partir du rang 1 et tend vers 2.
6. Si $u_0 < 0$, $u_1 > 4$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et tend vers $+\infty$.

Exercice 3

On considère les suites $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $i_0 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $e_0 = 3\sqrt{3}$ et , pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$e_{n+1} = \frac{2e_n i_n}{e_n + i_n} \text{ et } i_{n+1} = \sqrt{i_n \times e_{n+1}}$$

On admettra que ces suites sont bien définies et strictement positives.

1. Si $0 < a < b$ alors si on pose $b' = \frac{2ab}{a+b}$ et $a' = \sqrt{ab'}$ par étude du signe des différences :

$$b' - a = \frac{2ab}{a+b} - a = \frac{a(b-a)}{a+b} > 0$$

Ainsi $b' > a$ et :

$$a = \sqrt{a^2} < \sqrt{ab'} = a' < \sqrt{b'^2} = b'$$

Ainsi :

$$a < a' < b' < b$$

On obtient alors par récurrence : si $n \in \mathbb{N}$:

$$i_n \leq e_n$$

puis :

$$i_n \leq i_{n+1} \leq e_{n+1} \leq e_n$$

2. Par les suites monotones $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et on montre alors que leurs limites respectives l et l' non nulles $l = \sqrt{ll'}$ donc $l = l'$.
Finalement : $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Leur limite commune est le nombre π ce qu'on ne demande pas de vérifier ici.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$e_{n+1} - i_{n+1} \leq e_{n+1} - i_n \leq \frac{2e_n i_n}{e_n + i_n} - i_n = \frac{i_n}{e_n + i_n}(e_n - i_n) \leq \frac{e_n - i_n}{2}$$

Ainsi par récurrence :

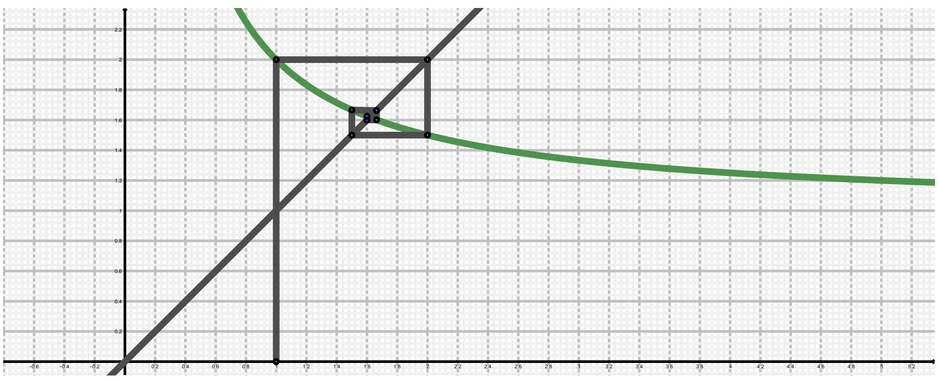
$$e_n - i_n \leq \frac{1}{2^n}(e_0 - i_0)$$

Exercice 4

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ et on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

On note enfin ϕ la racine positive de l'équation $x^2 = x + 1$.

1. Par récurrence, pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et est strictement positif.
2. $u_1 = 2/1$; $u_2 = 3/2$; $u_3 = 5/3$; $u_4 = 8/5$; $u_5 = 13/8$.
3. Par récurrence : pour tout entier naturel n, u_n est un nombre rationnel.
4. 
5. Si on suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, $u_n \to \phi$.

6. $f \circ f$ est croissante, admet ϕ comme point fixe $]0, \phi[$ et $]\phi, +\infty[$ comme intervalles stables et : si $x > 0$: $f(f(x)) - x = \frac{x+1-x^2}{x+1}$ qui est positif avant ϕ et négatif aprés.

   Ce qui montre comme fait en TD que : la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par ϕ et que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par ϕ.
7. les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ tendent ϕ.

   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et a pour limite ϕ.

   On définit deux suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $p_0 = q_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$\begin{cases} p_{n+1} = p_n + q_n \\ q_{n+1} = p_n \end{cases}$$

   On admet que, pour tout entier naturel n, p_n et q_n sont bien définis et sont des nombres entiers strictement positifs.
8. Pour tout entier naturel n, $p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n$:
   La propriété est vraie pour $n = 0$ et si $n \in \mathbb{N}$:
   $p_{n+2}q_{n+1} - p_{n+1}q_{n+2} = (p_{n+1} + q_{n+1})p_n - p_{n+1}(p_n + q_n) = -(p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1}$
   D'où la récurrence.
9. Par récurrence : pour tout entier naturel n, $\frac{p_n}{q_n}$ est la fraction irréductible égale à u_n.
10. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $|u_n - \phi| \leq \frac{1}{2^n}$.