

Fiche 31 : Polynômes.

Exercice 1

Trouver toutes les racines $\mathbb{C}$, en déduire les décomposition irréductibles sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ de :

$$Q = X^6 + X^3 + 1, \quad R = X^6 - X^5 + X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$$

Exercice 2

Résoudre le système suivant d'inconnues a, b et c dans $\mathbb{C}^*$:

$$\begin{cases} a + b + c = 11 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 49 \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \end{cases}$$

Exercice 3

Soient a, b, c des complexes, x_1, x_2, x_3 les racines de $X^3 + aX^2 + bX + c$.
Calculer le polynôme unitaire de $\mathbb{R}_3[X]$ dont x_1^2, x_2^2, x_3^2 sont les racines.

Exercice 4

Soit P un polynôme unitaire à coefficients complexes de degré 4.

Montrer que les images dans le plan complexe des racines de P forment un parallélogramme si et seulement si P' et $P^{(3)}$ ont une racine commune.

Exercice 5

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Montrer qu'il n'y a un nombre fini de polynômes réels unitaires de degré n à coefficients entiers (relatifs) ayant toutes leurs racines éventuellement complexes de module inférieur ou égal à 1.

Faire la liste de ces polynômes pour $n = 2$.

Exercice 6

Déterminer les polynômes P réels tels que :

$$P(X^2) = P(X)P(X-1)$$

On pourra s'intéresser aux racines de P ...