Fiche 32 : TD du 14-12.

Exercice 1

1. Déterminer un polynôme réel de degré au plus 2 tel que $P(-1) = 1$, $P(0) = -1$ et $P(1) = -1$. Ce polynôme est -il unique ?
2. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(-1) = 1$, $P(0) = -1$ et $P(1) = -1$.

Exercice 2

Soit $P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$.

1. Vérifier que j est racine de P.
2. En observant de plus que P est pair, donner ses décompositions irréductibles dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

Exercice 3

1. Rappeler la décomposition en produits de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ de $X^n - 1$.
2. En déduire la décomposition en produits de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ de $P = 1 + X + \cdots + X^{n-1}$.
3. Calculer $P(1)$ et en déduire : $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Exercice 4

On considère la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $P_0 = 2$, $P_1 = X$ et la relation de récurrence, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P_{n+1} = X.P_n - P_{n-1}$$

1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est unitaire de degré n.
2. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}^*$:
$$P_n\left(z + \frac{1}{z}\right) = z^n + \frac{1}{z^n}$$
3. En déduire les racines de P_n (*Indication : elles sont réelles*) et sa factorisation irréductible réelle.

Exercice 5

Soit, pour $n \geq 0$, $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$.

1. Démontrer que P_n admet n racines simples complexes.
2. Démontrer que, si n est entier P_{2n} n'a pas de racine réelle et P_{2n+1} a une et une seule réelle.