

Fiche 33 : Polynômes.

Exercice 1

Calculer $a^7 + b^7 + c^7$, où a, b, c sont les racines de $P = X^3 - X + 1$.

Exercice 2

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $P(X) = (X + 1)^{2p+1} - (X - 1)^{2p+1}$.

1. Quel est le degré de P ? son terme dominant? son terme constant? sa parité?
2. Déterminer les racines de P .
3. Montrer que $\forall p \in \mathbb{N} \prod_{k=1}^p \tan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = \sqrt{2p+1}$.

Exercice 3

Montrer que si P est un polynôme réel ou complexe : $(P(X) - X) | (P(P(X)) - P(X))$ et $(P(X) - X) | (P(P(X)) - X)$

1. Dans le cas où $P(X) - X$ est scindé à racines simples.
2. Dans le cas général (*on pourra écrire la forme développée de P*).

Exercice 4

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$ si et seulement si $P = aX^n$ avec $|a| = 1$
On pourra calculer $|P(e^{i\theta})|^2$ pour θ réel.

Exercice 5

Déterminer les polynômes réels unitaires tel que $P' | P$.