Fiche 35 : Continuité : les grands classiques.

Exercice 1

Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, telle que pour chaque $x \in \mathbb{R}$, $f(x)^2 = 1$.
Montrer que $f = 1$ ou $f = -1$.

Exercice 2

1. Montrer que si $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ est continue alors il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = c$. Un tel point est dit *fixe*.
2. Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue sans point fixe.

Exercice 3

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ solutions du problème P suivant :

$$f(1) = 1$$

$$\text{Si } x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} : \begin{cases} f(x + y) = f(x) + f(y) \\ f(x \times y) = f(x) \times f(y) \end{cases}$$

On pourra commencer par montrer que f est croissante

Exercice 4

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ solutions du problème Q suivant :

$$f(1) = 1$$

Si x est réel alors $f(x)$ aussi.

$$\text{Si } z \in \mathbb{C}, z' \in \mathbb{C} \begin{cases} f(z + z') = f(z) + f(z') \\ f(z \times z') = f(z) \times f(z') \end{cases}$$

Exercice 5

Soit f une fonction réelle continue sur $\mathbb{R}$ ayant au moins une période $T > 0$ (on dit dans ce cas f est **périodique**).

1. Montrer que si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une période T_n de f avec $0 < T_n < \frac{1}{n}$, alors f est constante.
On suppose pour la suite que f n'est pas constante
2. Montrer qu'on peut poser $T_{Min} = \text{Min}(\{T > 0 / T \text{ est une période de } f\})$
3. Montrer que T_{Min} est la période de f , c'est à dire que tout autre période T de f est un multiple entier de T_{Min} .
4. Quel est l'ensemble des périodes de la fonction $1_{\mathbb{Q}}$

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Que peut-on dire de f' si on sait que f est paire? impaire? périodique?
2. Que peut-on dire de f si on sait que f' est paire? impaire? périodique?
3. Montrer que si f' est T -périodique et $f(T) = f(0)$ alors f est périodique.