# Fiche 38 : TD du 11-01.

**Exercice 1**

1. On pose $\omega = e^{2i\pi/7}$.
   Rappeler la valeur de $\omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6$.
   En déduire les valeurs de :
   $\cos(\frac{2\pi}{7})\cos(\frac{4\pi}{7})\cos(\frac{6\pi}{7})$
   $\cos(\frac{2\pi}{7})\cos(\frac{4\pi}{7}) + \cos(\frac{2\pi}{7})\cos(\frac{6\pi}{7}) + \cos(\frac{6\pi}{7})\cos(\frac{4\pi}{7})$
   $\cos(\frac{2\pi}{7}) + \cos(\frac{4\pi}{7}) + \cos(\frac{6\pi}{7})$
2. En déduire un polynôme à coefficients rationnels de degré 3 dont les racines sont les nombres : $\cos(2k\pi/7)$, $k \in [\![1,3]\!]$.
3. En déduire un polynôme à coefficients rationnels de degré 6 dont les racines sont les nombres : $\pm\sin(k\pi/7)$, $k \in [\![1,3]\!]$.
4. Montrer que $\sin(\pi/7)$ est irrationnel.

**Exercice 2**

1. Soit $f$ une application continue d'un intervalle $]a,b[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, dérivable en $c \in ]a,b[$..
   On rappelle qu'il existe une (unique) application continue $\epsilon$ de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\epsilon(c) = 0$ et, pour tout $x \in ]a,b[$ distinct de $c$, on ait :
   $$f(x) = f(c) + (x-c)f'(c) + (x-c)\epsilon(x)$$
   On pose, pour $n \in \mathbb{N}$ :
   $$S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}$$
2. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$ : $\frac{1}{2} \leq S_n \leq 1$
3. Montrer que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et qu'elle converge vers une limite que l'on nommera $S$.
4. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue, dérivable en 0 et telle que $f(0) = 0$. Montrer que la suite $(\sigma_n(f))_{n\geq 1}$ de terme général :
   $$\sigma_n(f) = f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{1}{n+1}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{2n}\right)$$
   converge vers $f'(0)S$ (utiliser 1.).
5. Montrer que $\sigma_n(f) = \log(2)$ lorsque $f$ est l'application $x \mapsto \log(1+x)$ et en déduire la valeur de $S$.
6. Calculer la limite de la suite $(\sigma_n)_{n\geq 1}$ de terme général :
   $$\sigma_n = \sin\frac{1}{n} + \sin\frac{1}{n+1} + \cdots + \sin\frac{1}{2n}.$$
7. Plus généralement, quelle est la valeur pour $p \in \mathbb{N}^*$ donné, de la limite $S_p$ de la suite $(\sigma_n(p))_{n\geq 1}$ de terme général :
   $$\sigma_n(p) = \sum_{k=0}^{pn} \frac{1}{n+k}?$$