

## Fiche 39 : Fonctions dérivables.

### Exercice 1

$f$  est définie par :

$$f \begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \sin(x)^3 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ f(x) = 1 & \text{si } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Déterminer le plus grand entier  $n$  tel que  $f$  soit de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $\mathbb{R}$ .

### Exercice 2

On considère la fonction

$$f \begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \frac{1}{\exp(\frac{1}{x})} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un polynôme réel  $P_n$  tel que pour  $x > 0$  :

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n\left(\frac{1}{x}\right)}{\exp\left(\frac{1}{x}\right)}$$

2. En déduire que  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

### Exercice 3

Soit  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ .

Montrer que  $f$  est prolongeable par continuité en 0. On note encore  $f$  la fonction prolongée.  
Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  mais que  $f'$  n'est pas continue en 0.

### Exercice 4

Montrer qu'une fonction dérivable sur un intervalle réel dont la dérivée ne s'annule pas est strictement monotone sur cet intervalle.

### Exercice 5

Soit le polynôme  $P(X) = X^3 - 2X^2 - 1$ .

1. Montrer que  $P$  admet une unique racine réelle  $\alpha$ . Calculer  $[\alpha]$ .
2. Prouver que  $\alpha = 2 + \frac{1}{\alpha^2}$

On introduit alors la fonction  $f$  définie par  $f(x) = 2 + \frac{1}{x^2}$  et la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = [\alpha]$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  
 $u_{n+1} = f(u_n)$

3. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_n > 2$
4. Prouver que pour tout  $x > 2$  :  $|f'(x)| < \frac{1}{4}$ .
5. En déduire que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\alpha$ .