Sup MPSI, Lycée Jean Perrin, 2023-2024.

DS 5, 12-01, Durée 2 h 30, Calculatrices interdites.

Question "de cours"

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = X^{2n} - 1$.

1. Déterminer les racines réelles de P_n.
2. Rappeler la factorisation complexe irréductible de P_n et en déduire sa factorisation irréductible réelle.
3. Donner les décompositions en éléments simples complexes de $\frac{1}{P_n}$ et $\frac{P_n'}{P_n}$.

Exercice 1

1. Déterminer la factorisation réelle et la factorisation complexe du polynôme : $P = X^3 - 1$.
2. En déduire la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de la fraction : $\dfrac{X^3}{X^3-1}$
3. En déduire une primitive de l'expression :

$$\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{x^3-1}$$

   On précisera le domaine de validité du calcul fait.

Exercice 2

On pose $\alpha = 2\cos(\frac{2\pi}{7}) = e^{2i\pi/7} + e^{-2i\pi/7}$ et $P = X^3 + X^2 - 2X - 1$.

1. Montrer que α est racine de P.
2. Montrer que si $\theta \in]0,\pi[$, alors $P(2\cos(2\theta)) = \frac{\sin(7\theta)}{\sin(\theta)}$.
3. Déterminer alors 2 autres racines de P et en déduire sa factorisation irréductible réelle.

Exercice 3

On considère la suite (T_n) de polynômes donnés par : $T_0 = 1$, $T_1(X) = X$ et, si $n \in \mathbb{N}^*$:

$$T_{n+1}(X) = 2X.T_n(X) - T_{n-1}(X)$$

1. Préciser $\deg(T_n)$ et le coefficient dominant de T_n pour $n \in \mathbb{N}^*$ en justifiant proprement.
2. Montrer que si $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:
$$T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$
On pourra procéder par récurrence avec prédécesseur et utiliser la relation :
$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$$
.

Pour la suite, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Résoudre l'équation d'inconnue θ : $T_n(\cos(\theta)) = 0$.
4. En déduire que T_n a n racines réelles $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ qu'on écrira sous la forme $x_k = \cos(\theta_k)$, $\theta_k \in [0, \pi]$ à préciser, pour $k \in [\![1, n]\!]$.
5. Justifier que T_n est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ et écrire sa factorisation réelle.
6. En remarquant que, si $x \in [-1, 1]$: $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$, déterminer
$$\mathrm{Max}_{[-1,1]} |T_n|$$

On considère pour la suite Q un polynôme de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1}.
On pose
$$M = \mathrm{Max}_{[-1,1]} |Q|$$

7. L'objectif de cette question est de montrer que $M \geq 1$.
On suppose, par l'absurde, que $M < 1$ et on pose $P = T_n - Q$.
   (a) Montrer que $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
   (b) Déterminer le signe de $P(\cos(k\pi/n))$ en fonction de $k \in \mathbb{N}$ et en déduire (on pourra utiliser le théorème des valeurs intermédiaires) que P a au moins n racines distinctes 2 à 2 dans $[-1, 1]$.
   (c) Conclure