Sup MPSI, Lycée Jean Perrin, 2023-2024.

DS 5, 12-01, Durée 2 h 30, Calculatrices interdites.

Question "de cours"

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = X^{2n} - 1$.

1. Racines réelles de P_n : 1 et -1.
2. $$P_n = \prod_{-n+1}^{n} (X - \exp(ik\pi/n))$$
$$P_n = (X-1)(X+1)\prod_{1}^{n-1}(X^2 - 2\cos(k\pi/n)X + 1)$$
3. $$\frac{1}{P_n} = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{\exp(ik\pi/n)}{2n(X - \exp(ik\pi/n))}$$
$$\frac{P_n'}{P_n} = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{X - \exp(ik\pi/n)}$$

Exercice 1

1. $P = X^3 - 1 = (X-1)(X-j)(X-j^2)$.
2. $\dfrac{X^3}{X^3-1} = 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{X-1} - \frac{X+2}{X^2+X+1}\right)$
3. $x > -1$:
$$\int \frac{x^3 \,\mathrm{d}x}{x^3-1} = x + \frac{1}{3}\ln(x-1) - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)$$

Exercice 2

On pose $\alpha = 2\cos(\frac{2\pi}{7}) = e^{2i\pi/7} + e^{-2i\pi/7}$ et $P = X^3 + X^2 - 2X - 1$.

1. Comme fait en classe en utilisant la somme des racines 7-ième de l'unité α, nulle, on a : α est racine de P.
2. De même : si $\theta \in]0, \pi[$, alors $P(2\cos(2\theta)) = \frac{\sin(7\theta)}{\sin(\theta)}$.
3. $P(2\cos(\frac{2\pi}{7})) = P(2\cos(\frac{4\pi}{7})) = P(2\cos(\frac{6\pi}{7}))$ les trois racines trouvées étant distinctes 2 à 2, on a la factorisation :
$$P = \left(X - 2\cos(\frac{2\pi}{7})\right)\left(X - 2\cos(\frac{4\pi}{7})\right)\left(X - 2\cos(\frac{6\pi}{7})\right)$$

Exercice 3

On considère la suite (T_n) de polynômes donnés par : $T_0 = 1$, $T_1(X) = X$ et, si $n \in \mathbb{N}^*$:

$$T_{n+1}(X) = 2X.T_n(X) - T_{n-1}(X)$$

1. Par récurrence avec prédécesseur : $\deg(T_n) = n$ et le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1}.
2. Si $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:
$$T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$
Par récurrence avec prédécesseur en utilisant la relation :
$$\cos((n+1)\theta) = 2\cos(n\theta)\cos(\theta) + \cos((n-1)\theta)$$

Pour la suite, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

3. $T_n(\cos(\theta)) = 0$ si et seulement si $\theta = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$, $k \in \mathbb{Z}$.
4. T_n a n racines réelles $x_1 = \cos(\frac{(2n-1)\pi}{2n}) < \cdots < \cos(\frac{\pi}{2n})$
5. $$T_n = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left(X - \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right)$$
6. Si $x \in [-1, 1]$: $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$, donc
$$\mathrm{Max}_{[-1,1]}\,|T_n| = 1$$

On considère pour la suite Q un polynôme de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1}.
On pose
$$M = \mathrm{Max}_{[-1,1]}\,|Q|$$

7. L'objectif de cette question est de montrer que $M \geq 1$.
On suppose, par l'absurde, que $M < 1$ et on pose $P = T_n - Q$.
   (a) $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ car les termes dominants se simplifient.
   (b) Pour $k \in \{0, ...n\}$: $T_n(\cos(k\pi/n)) = (-1)^k$ et $M < 1$ donc $P(\cos(k\pi/n))$ a le signe de $(-1)^k$ et est non nul ce qui implique que P change de signe entre $\cos(k\pi/n)$ et $\cos((k+1)\pi/n)$ pour $k \in \{0, ..., n\}$ donc P a au moins n racines distinctes 2 à 2 dans $[-1, 1]$.
   (c) Par les 2 questions précédentes, $P = 0$, ce qui est impossible : $T_n \neq Q$. On a donc $M \geq 1$.
8. On fait le même raisonnement avec $P = T_n - Q$ sauf qu'ici, on sait seulement que
$$P(\cos(0\pi/n)) = 0, P(\cos(\pi/n)) \leq 0...$$
$$..., P(\cos(2\pi/n)) \geq 0 \text{ et } P(-1) \leq 0 \text{ si n est pair}, P(-1) \leq 0 \text{ si n est impair}$$
On suppose pour la suite $P \neq 0$.

Si aucun des nombres $P(\cos(k\pi/n))$ $k \in [\![1, n]\!]$ n'est racine de P, par le théorème des valeurs intermédiaires, pour $k \in [\![1, n-1]\!]$ on peut trouver dans chacun des intervalles $]\cos((k+1)\pi/n), \cos((k)\pi/n)$
au moins une racine de P. Les intervalles étant disjoints, P a au moins n racines, il est nul.
Si un des nombres $P(\cos(k\pi/n))$ $k \in [\![1, n]\!]$ est racine d'ordre impair de P, on peut, au voisinage de cette racine, trouver des points en lesquels $P > 0$ et $P < 0$.
Si un des nombres $P(\cos(k\pi/n))$ $k \in [\![1, n]\!]$ est racine d'ordre pair de P, on peut, en remplaçant les facteurs du type $(X - \cos(k\pi/n))^2$ par $(X - \cos(k\pi/n) - \alpha)(X - \cos(k\pi/n) + \alpha)$ avec $\alpha > 0$ petit,

remplacer P par un polynôme S de même degré et qui, au voisinage de $\cos(k\pi/n)$, admet des points en lesquels $S > 0$ et $S < 0$. On peut de plus s'assurer que S ainsi construit a le même signe au sens strict que P aux points $\cos(k'\pi/n))$, $k' \in [\![1, n]\!] - \{k\}$.

En passant si besoin à S, on a ainsi un polynôme de degré au plus n et une suite de point $x_0 = 1 > x_1 ... > x_n$ construits au voisinage des points $\cos(k\pi/n)$ $k \in [\![1, n]\!]$ avec :

$$S(1) = 0, S(x_1) > 0, S(x_2) < 0, S(x_n) < 0 \text{ si n est pair}, S(-x_n) > 0 \text{ si n est impair}$$

Autrement dit, on est dans situation décrite à la question précédente. On conclut de même en obtenant que S de gré au plus $n - 1$ non nul a au moins n racines : impossible. Donc :

$$Q = T_n$$