Fiche 41 : Fonctions dérivables.

Exercice 1

1. Déterminer l'ensemble des points où la fonction $x \to \sin(\sqrt{x})$ définie sur $\mathbb{R}^+$ est dérivable.
2. Même question pour la fonction $x \to \cos(\sqrt{x})$ définie sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 2

Comparer au sens de "est négligeable par rapport à" les suites suivantes :

$$a_n = n^n, \qquad b_n = n^{\ln(n)}, \qquad c_n = e^{n^2}, \qquad d_n = (\ln n)^{n \ln n}$$

Exercice 3

Donner des équivalents les plus simples possibles des suites $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$, $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}$, $\frac{n+(-1)^n}{n+\sqrt{n}}$.

Exercice 4

Soient $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a, b]$ $(a < b)$ et dérivables sur $]a, b[$. On suppose que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$.

1. Montrer que $g(x) \neq g(a)$ pour tout $x \in]a, b[$.
2. Posons $p = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ et considérons la fonction $h(x) = f(x) - pg(x)$ pour $x \in [a, b]$. Montrer que h vérifie les hypothèses du théorème de Rolle et en déduire qu'il existe un nombre réel $c \in]a, b[$ tel que
$$\frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$
3. On suppose que $\lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, où ℓ est un nombre réel. Montrer que
$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)} = \ell.$$
4. *Application.* Calculer la limite suivante :
$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\arccos x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$