Fiche 42 : Fonctions dérivables.

Exercice 1

Donner des équivalents simples pour $x \to 0^+$ des expressions suivantes :

$$f_1(x) = \ln(e+x) - 1 \ , \ f_2(x) = 1 - \cos(x) \ , \ f_3(x) = \tan(x) + \sin(x)$$

$$f_4(x) = \tan(x) - \sin(x) \ , \ f_5(x) = e^{\tan(x)} - e^{\sin(x)}, \ f_6(x) = \frac{\tan(x^2 - x^2\cos(x))}{1 - \sqrt{\cos(x)}}$$

Exercice 2

Montrer que l'expression $f(x) = xe^x$ défini une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$ on note g sa réciproque :

1. Montrer que :
$$g(y) \sim_{y\to+\infty} \ln(y)$$
2. Donner un équivalent simple de $g(y) - \ln(y)$ pour $y \to +\infty$.

Exercice 3

Donner un équivalent simple de $\arccos(1-h)$ pour $h \to 0^+$ en utilisant le développement de cos pour $x \to 0$.

Exercice 4

Donner des équivalents simples pour $x \to +\infty$ des expressions suivantes :

$$f_1(x) = e^{\sqrt{x^2-1}} \ , \ f_2(x) = \mathrm{sh}\left(x + \frac{1}{x}\right) \ , \ f_3(x) = \mathrm{ch}(\sqrt{x-1})$$

Exercice 5

Soit f une fonction de classe C^2 positive sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que en tout point x_0 tel que $f(x_0) = 0$ alors $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) \geq 0$.
2. Montrer que si $\sqrt{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors, en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$: $f''(x_0) = 0$.
3. Montrer que si, en tout point x_0 tel que $f(x_0) = 0$ alors $f''(x_0) = 0$, alors $\sqrt{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On pourra utiliser la formule de Taylor Young.