Fiche 43 : Développements limités.

Exercice 1

Donner les développements limités aux ordres demandés des fonctions proposés :

1. Développement à l'ordre 3 pour $x \to \pi/4$ de $\sin(x)$.
2. Développement à l'ordre 4 pour $x \to 0$ de $\frac{1}{\cos(x)}$.
3. Développement à l'ordre 2 pour $x \to 2$ de $\sqrt{x}$.
4. Développement à l'ordre 3 pour $x \to \pi/3$ de $\tan(x)$.
5. Développement à l'ordre 4 pour $x \to 0$ de $\exp(\cos(x))$.

Exercice 2

On considère la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1}{1+3x+2x^2}$$

1. Préciser le domaine de définition D_f de f.
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de f.
3. Décomposer f en éléments simples et retrouver le résultat précédent.
4. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur D_f et en déduire que f admet un développement à tout ordre $n \in \mathbb{N}$ en 0. Préciser $f^{(n)}(x)$ pour $x \in D_f$.
5. Écrire le développement de f à tout ordre n en 0. On donnera le résultat sous la forme $f(x) = 1 - 3x + \cdots + a_n x^n + o_{x\to 0}(x^n)$ en précisant a_n en fonction de n.

Exercice 3

On s'intéresse au développement de tan en 0. Pour cela, on considère la relation :

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$$

1. Montrer que l'équivalent classique : $\tan(x) \sim_{x\to 0} x$ permet avec celle ci de retrouver le développement à l'ordre 3 de tan.
2. En utilisant cette méthode, déterminer le développement aux ordres 5 puis 7 de tan.

Exercice 4 : Théorème de Césaro

On considère une suite (u_n) telle que $u_n \to l \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\frac{1}{n}(u_1 + \cdots + u_n) \to l$$

Exercice 5 : Lemme de Césaro

On considère une suite (u_n) telle que $u_{n+1} - u_n \to l \in \mathbb{R}^*$. Montrer que

$$u_n \sim n.l$$

Indication : on pourra utiliser le théorème de Césaro.

Exercice 6

1. Étudier la suite définie par : $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.
2. On pose $v_n = u_n^2 - u_{n-1}^2$. Montrer que $\lim v_n = 2$, puis en déduire que $u_n \sim \sqrt{2n}$ (on pourra utiliser le lemme de Césaro précédent).

Exercice 7

Soit $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Montrer brièvement que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive et converge vers 0.
2. (a) Déterminer un réel α tel que la suite $\frac{1}{u_{n+1}^\alpha} - \frac{1}{u_n^\alpha}$ ait une limite finie non nulle.

   (b) En utilisant le lemme de Césaro, déterminer un équivalent simple de u_n.