

## Fiche 46 : TD du 01-02.

### Exercice 1

1. Déterminer le développement limité en 0 de la fonction  $x \rightarrow \sin(\exp(x))$  à l'ordre 3 :

$$\sin(\exp(x)) = \dots + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$$

2. Déterminer le développement limité en 0 de la fonction  $x \rightarrow \arctan(\sin(x))$  à l'ordre 3 :

$$\arctan(\sin(x)) = \dots + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$$

3. Déterminer le développement limité en 0 de la fonction  $x \rightarrow \arctan(\cos(x))$  à l'ordre 4 :

$$\arctan(\cos(x)) = \dots + o_{x \rightarrow 0}(x^4)$$

### Exercice 2

On considère la fonction :

$$f(x) = \frac{1}{1 - (x + x^2)}$$

(Dans cet exercice, il n'est pas utile de faire de décomposition en éléments simples de  $f$ )

1. Donner le domaine de définition  $D_f$  de  $f$  et justifier (sans les calculer) que  $f$  admet en 0 des développements limités à tous les ordres en 0.
2. Donner le développement en 0 de  $f$  à l'ordre 5 .
3. On fixe  $n > 5$  et on note  $f(x) = \sum_{k=0}^n F_k x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$  le développement à l'ordre  $n$  de  $f$ .
  - (a) Préciser les valeurs de  $F_0, \dots, F_5$ .
  - (b) Éventuellement en considérant la fonction  $x \rightarrow x.f(x) + x^2.f(x)$ , montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

4. Donner un équivalent élémentaire de  $f(x)$  pour  $x \rightarrow +\infty$  puis un développement de  $f(x)$  pour  $x \rightarrow +\infty$  de précision  $o\left(\frac{1}{x^4}\right)$

### Problème

On considère la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x \operatorname{ch}(x)$ .

5. Montrer que  $f$  définit une bijection impaire de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On note  $g$  sa réciproque.
6. Justifier que  $g$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .
7. Déterminer le développement limité à l'ordre 5 de  $f$  en 0.
8. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 de  $f$  en 1 sous la forme  $f(x+1) = \dots + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$ . On pourra utiliser la formule  $\operatorname{ch}(x+1) = \operatorname{ch}(x) \cdot \operatorname{ch}(1) + \operatorname{sh}(x) \operatorname{sh}(1)$  après l'avoir justifiée
9. Déterminer le développement à l'ordre 5 de  $g$  en 0 (On pourra le chercher sous forme de coefficients indéterminés).
10. Déterminer le développement à l'ordre 2 de  $g$  en  $\operatorname{ch}(1)$  sous la forme  $g(\operatorname{ch}(1) + h) = \dots + o_{h \rightarrow 0}(h^2)$ .

On rappelle et on ne demande pas de justifier que si 2 fonctions  $m$  et  $n$  définies au voisinage d'un point  $a$  de  $\overline{\mathbb{R}}$  vérifient pour  $x \rightarrow a$  :  $m(x) \sim n(x) \rightarrow +\infty$  alors  $\ln(m(x)) \sim \ln(n(x))$ .

11. Montrer que  $g(y) \sim \ln(y)$  pour  $y \rightarrow +\infty$ .
12. Donner un équivalent élémentaire de  $g(y) - \ln(y)$  pour  $y \rightarrow \infty$ .