Sup MPSI, Lycée Jean Perrin, 2023-2024.

DS 6, 02-02, Durée 2 h 30, Calculatrices interdites.

Exercice 1

1. Calculer le développement à la précision $o(x^3)$ pour $x \to 0$ de l'expression $f(x) = \exp(\sin(x))$ en justifiant proprement.
2. Calculer le développement à la précision $o(x^4)$ pour $x \to 0$ de l'expression $f(x) = \exp(\cos(x))$ en justifiant proprement.
3. Calculer le développement à la précision $o(x^3)$ pour $x \to 0$ de l'expression $f(x) = \arctan(\exp(x))$ en justifiant proprement.

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on se propose d'étudier les solutions de l'équation (sur $x > 0$) :

$$\ln(x) + x = n \qquad (E_n)$$

Pour cela, on introduit la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = \ln(x) + x$.

1. **Existence des solutions de** (E_n)
   (a) Étudier les variations de g.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (E_n) admet une unique solution, notée x_n, et que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi définie est strictement croissante.
   (c) Que vaut x_1 ?
   (d) Quelle est la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. **Comportement asymptotique de** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$
   (a) Montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.
   (b) En déduire que $x_n \underset{n\to+\infty}{=} n - \ln(n) + o(1)$.
   (c) Montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{=} n - \ln(n) + \dfrac{\ln n}{n} + o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$

Exercice 3

On considère la fonction $f : x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Justifier que f est dérivable sur $]-1,0[$ et sur $]0,+\infty[$.
3. Rappeler le développement limité en 0 de $x \mapsto \ln(1+x)$ à l'ordre 3 puis le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x} - 1$.
4. En déduire les deux égalités

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} e \times \exp\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) \underset{x\to 0}{=} e - e\frac{x}{2} + e\frac{11}{24}x^2 + o(x^2).$$

5. En déduire la limite de la fonction f en 0. On prolonge f par cette valeur en 0.
6. Montrer que f ainsi prolongée est dérivable en 0 et que $f'(0) = -\frac{e}{2}$.
7. Déterminer un équivalent de $f(x) - e$ lorsque x tend vers 0.

On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = f\left(\frac{1}{n}\right)$.

8. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers e et donner un équivalent de la suite $(u_n - e)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = 2u_{2n} - u_n$.

9. Montrer que $v_n - e \sim -\dfrac{11e}{48n^2}$. Quel est l'intérêt de cette suite ?

Exercice 4

1. Démontrer l'existence d'une suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :
   - $T_0(X) = X$.
   - Pour tout entier naturel n, $\tan^{(n)}$, dérivée n-ième de la fonction tan, vérifie :

   $$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \tan^{(n)}(x) = T_n(\tan(x)).$$

   On explicitera une relation de récurrence vérifiée par les polynômes T_n et T_{n+1}.
2. Expliciter les polynômes T_1, T_2, T_3.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que les coefficients du polynôme T_n sont des entiers naturels. Quel est le degré du polynôme T_n et sa parité éventuelle ?
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\tan^{(2n)}(0) = 0$ et que pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$: $\tan^{(n)}(x) \geq 0$.