DS 6, 02-02, Correction.

Exercice 1

Pour $x \to 0$

1. $$\exp(\sin(x)) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$$

2. $$\exp(\cos(x)) = e\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^4\right) + o(x^4)$$

3. $$\arctan(\exp(x)) = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{12}x^3 + o(x^3)$$

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on se propose d'étudier les solutions de l'équation (sur $x > 0$) :

$$\ln(x) + x = n \qquad (E_n)$$

Pour cela, on introduit la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = \ln(x) + x$.

1. **Existence des solutions de** (E_n)
   (a) g est strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$, c'est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (E_n) admet une unique solution, notée x_n, et la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi définie est strictement croissante.
   (c) $x_1 = 1$?
   (d) $x_n \to \infty$?
2. **Comportement asymptotique de** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$
   (a) Sachant $\ln(x_n) = o(x_n)$:
   $$x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$$
   (b) $$x_n \underset{n\to+\infty}{=} n - \ln(x_n) = n - \ln(n) - \ln\left(\frac{x_n}{n}\right) = n - \ln(n) + o(1)$$
   (c) De qui précède, il suit : $\frac{x_n}{n} = 1 - \frac{\ln(n)}{n} + o(1/n)$ puis $\ln\left(\frac{x_n}{n}\right) \sim -\frac{\ln(n)}{n}$ puis finalement :
   $$x_n \underset{n\to+\infty}{=} n - \ln(n) + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

Exercice 3

On considère la fonction $f : x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

1. f est définie sur $]-1,0[$ et sur $]0,+\infty[$.
2. f est dérivable sur $]-1,0[$ et sur $]0,+\infty[$.
3. $$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$
$$\frac{\ln(1+x)}{x} - 1 = -\frac{1}{2}x + \frac{x^2}{3} + o(x^2)$$
4. $$f(x) \underset{x\to 0}{=} \exp\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)$$
   Puis en développant :
$$f(x) \underset{x\to 0}{=} e \times \exp\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) \underset{x\to 0}{=} e - e\frac{x}{2} + e\frac{11}{24}x^2 + o(x^2).$$
5. $f(0) = e$.
6. $f'(0) = -\frac{e}{2}$.
7. $f(x) - e \sim -e\frac{x}{2}$ lorsque x tend vers 0.

On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = f\left(\frac{1}{n}\right)$.

8. $(u_n \to e$ et $u_n - e \sim -\frac{e}{2n}$.

On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = 2u_{2n} - u_n$.

9. $$v_n - e = 2\left(e - e\frac{1}{2(2n)} + e\frac{11}{24(2n)^2}\right) - \left(e - e\frac{x}{2} + e\frac{11}{24n^2}\right) - e \sim -\frac{11e}{48n^2}$$

Exercice 4

1. Démontrer l'existence d'une suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :
   — $T_0(X) = X$.
   — Pour tout entier naturel n, $\tan^{(n)}$, dérivée n-ième de la fonction tan, vérifie :
$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \tan^{(n)}(x) = T_n(\tan(x)).$$
   Pour la récurrence, il suffit de poser : $T_{n+1} = (1+X^2)T_n'$ et T_{n+1}.
2. Ainsi : $T_1 = 1 + X^2$, $T_2 = 2X^3 + 2X$, $T_3 = 6X^4 + 8X^2 + 2$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par récurrence : les coefficients du polynôme T_n sont des entiers naturels, le degré du polynôme T_n est n et sa parité est celle de $n+1$.
4. Par récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\tan^{(2n)}(0) = 0$ et que pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$: $\tan^{(n)}(x) \geq 0$.