

## Fiche 48 : fonctions réelles.

### Exercice 1

Soit  $f$  fonction réelle  $C^2$  sur  $[a, b]$  tel que  $f(a) = f'(a)$  et  $f(b) = f'(b)$ .

Montrer qu'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que :

$$f(c) = f''(c)$$

On pourra considérer la fonction  $(f(x) - f'(x))e^x$ .

### Exercice 2

On pose pour  $x \in \mathbb{R}^*$ , on pose :

$$f(x) = x^3 \sin(1/x)$$

Montrer que  $f$  se prolonge en 0 en une fonction dérivable en 0, ayant un développement à l'ordre 2 en 0 mais que  $f$  ainsi prolongée n'est pas de classe  $C^2$ .

### Exercice 3

Étudier la fonction

$$f(x) = (\cos(x))^{1/x}$$

(dérivabilité, limites, tangentes ...) sur l'intervalle  $] -\pi/2, \pi/2[$ .

On pourra commencer par étudier l'expression  $\ln(\cos(x)) + x \tan(x)$  sur le même intervalle.

### Exercice 4

Soit  $f$  fonction réelle dérivable sur  $[0, 1]$  avec  $f(0) = 0$  et  $f(1) = 1$ . Montrer qu'il existe des réel  $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$  tel que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f'(x_k) = 1$$