

Fiche 49 : espaces vectoriels.

Exercice 1

Dire si les objets suivants sont des espaces vectoriels réels :

1. L'ensemble des fonctions réelles sur $[0, 1]$, continues, positives ou nulles.
2. L'ensemble des fonctions réelles définies sur \mathbf{R} vérifiant $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
3. L'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ vérifiant $f(1/2) = 0$.
4. L'ensemble des fonctions impaires sur \mathbf{R} .
5. L'ensemble des fonctions sur \mathbf{R} qui sont nulle en 1 ou nulle en 4.
6. L'ensemble des polynômes de degré n .
7. L'ensemble des fonctions de classe C^2 vérifiant $f'' + \omega^2 f = 0$.
8. L'ensemble des primitives de la fonction xe^x sur \mathbf{R} .
9. L'ensemble des polynômes ne comportant pas de terme de degré 7.

Exercice 2

Dans \mathbf{R}^3 , on considère les ensembles $P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / x + y + z = 0 \right\}$ et $D = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$

Montrer que P et D sont 2 espaces supplémentaires de \mathbf{R}^3 .

Exercice 3

Dans l'espace \mathbf{R}^3 , on considère $P_1 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$, $P_2 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$.

Montrer que $P_1 \cap P_2$ est une droite dont on donnera un système d'équations caractéristiques et un vecteur directeur. A-t-on $P_1 \oplus P_2$? Déterminer $P_1 + P_2$.

Exercice 4

Montrer que dans \mathbf{R}^3 : $\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} \right)$

Exercice 5

1. Montrer que les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ i \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ forment une base de l'espace vectoriel complexe \mathbb{C}^3 .
2. Calculer les coordonnées de $v = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ i \end{pmatrix}$ dans cette base.
3. Compléter la famille v_1, v_2, v_3 pour former une base réelle de \mathbb{C}^3 .
4. Calculer les coordonnées de $v = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ i \end{pmatrix}$ dans cette base.