Fiche 52 : TD du 15-02.

Exercice 1

Montrer que les vecteurs $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer les coordonnées respectives des vecteurs $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ dans cette base.

Exercice 2

Soient dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix}-1\\2\\3\\-4\end{pmatrix}$.

Peut-on déterminer x et y pour que $\begin{pmatrix}x\\1\\y\\1\end{pmatrix} \in \text{Vect}\{v_1, v_2\}$? Et pour que $\begin{pmatrix}x\\1\\1\\y\end{pmatrix} \in \text{Vect}\{v_1, v_2\}$?

Exercice 3

Dans $\mathbb{R}^4$ on considère l'ensemble E des vecteurs (x_1, x_2, x_3, x_4) vérifiant l'équation $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. L'ensemble E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$? Si oui, en donner une base.

Exercice 4

Soit (Σ) le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ x - t = 0 \end{cases}$$

Montrer que l'ensemble des solutions de (Σ) forme un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$. Déterminer la dimension et une base de F.

Exercice 5

1. Soient $e_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ et $e_5 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

   Posons $F = \text{Vect }\{e_1, e_2\}, G = \text{Vect }\{e_3, e_4\}, G' = \text{Vect }\{e_3, e_4, e_5\}$. Montrer que $E = F \oplus G$ et $E \neq F \oplus G'$.

Exercice 6

Dans l'espace $\mathcal{P}_5$ des polynômes de degré ≤ 5, on définit les sous-ensembles :

$E_1 = \{P \in \mathcal{P}_5 \mid P(0) = 0\}$
$E_2 = \{P \in \mathcal{P}_5 \mid P'(1) = 0\}$
$E_3 = \{P \in \mathcal{P}_5 \mid x^2 + 1 \text{ divise } P\}$
$E_4 = \{P \in \mathcal{P}_5 \mid x \mapsto P(x) \text{ est une fonction paire}\}$
$E_5 = \{P \in \mathcal{P}_5 \mid \forall x,\ P(x) = xP'(x)\}$.

1. Déterminer des bases des sous-espaces vectoriels E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, $E_1 \cap E_2$, $E_1 \cap E_3$, $E_1 \cap E_2 \cap E_3$, $E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4$.
2. Déterminer dans $\mathcal{P}_5$ des sous-espaces supplémentaires de E_4 et de $E_1 \cap E_3$.