Fiche 55 : applications linéaires.

Exercice 1

Soient, dans $\mathbb{R}^3$, P le plan d'équation $z = x - y$ et D la droite d'équations $x = -y = z$, p la projection de R^3 sur P parallèlement à D, q la projection de R^3 sur D parallèlement à P.
Déterminer pour $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ quelconque, les coordonnes de $p(v)$.

Exercice 2

On considère l'application : $P : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \frac{2y-x}{3} \\ \frac{4y-2x}{3} \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
Montrer que P est un projecteur et identifier ses espaces propres : $\mathrm{Im}(P)$ et $\mathrm{Ker}(P)$.

Exercice 3

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\begin{cases} f(e_1) = 13e_1 + 12e_2 + 6e_3 \\ f(e_2) = -8e_1 - 7e_2 - 4e_3 \\ f(e_3) = -12e_1 - 12e_2 - 5e_3 \end{cases}$$

1. Montrer que f est une symétrie de $\mathbb{R}^3$.
2. Identifier les espaces propres associés c'est à dire les espaces : $\mathrm{Ker}(f - Id)$ et $\mathrm{Ker}(f + Id)$.

Exercice 4

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n (n entier naturel donné). Soit φ l'application définie par :

$$\forall P \in E,\ \varphi(P) = P(X+1) - P(X)$$

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}\varphi$ et $\mathrm{Im}\varphi$.

Exercice 5

On considère l'espace complexe $E = \mathbb{C}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3) et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$ défini par

$$f : \begin{cases} e_1 \to e_2 \\ e_2 \to e_3 \\ e_3 \to e_1 \end{cases}$$

1. Montrer sans calcul que f est un automorphisme de $\mathbb{C}^3$ et déterminer f^2 et f^{-1}.
2. Déterminer $F = \ker(f - Id)$, $G = \ker(f - jId)$, $H = \ker(f - j^2Id)$.
3. Montrer que $E = F \oplus G \oplus H$ et donner une base adaptée à la somme précédente.