Fiche 56 : TD du 7-03 : Révisions : Fonctions.

Exercice 1

On considère si $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geq 0$, la fonction $f_n(x) = x\sqrt{1+\frac{x}{n}}$.

1. Montrer qu'il existe un unique réel $x_n \geq 0$ tel que $f_n(x_n) = 1$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi définie est croissante et majorée par 1 puis que pour $n \to \infty$: $x_n \to 1$.
3. Montrer que $x_n = 1 - \frac{1}{2n} + o_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$.
   On pourra remarquer que $\frac{x_n}{n} \sim \frac{1}{n}$
4. Rappeler le développement à l'ordre 2 pour $X \to 0$ de l'expression : $(1+X)^{-\frac{1}{2}}$.
5. En déduire un développement de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sous la forme :

$$x_n = 1 - \frac{1}{2n} + \frac{\alpha}{n^2} + o_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad (\alpha \in \mathbb{R} \text{ à préciser})$$

Exercice 2

1. Montrer que la fonction définie par : $f : x \to \exp(-\frac{1}{2}x^2)$ est de classe C^∞ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme réel H_n, de degré n, tel que, pour tout x réel :

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n f(x) H_n(x)$$

2. Soit f une fonction réelle dérivable sur l'intervalle : $[a, +\infty[$ telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(a)$ alors il existe $c \in]a, +\infty[$ telle que $f'(c) = 0$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, H_n est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $n \geq 2$, entre 2 racines consécutives de H_n, il existe une racine et une seule de H_{n-1}.

Indication : utiliser la question précédente.