

DS 7, 02-02, Correction rapide.

Exercice 1

1. Pour $x \rightarrow 0$:

$$f(x) = \ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$

- 2.

$$g(x) = \tan(\pi/4 + x) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)$$

Exercice 2

On considère les ensembles $P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0 \right\}$ et $D = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

1. Cf.cours
2. On peut utiliser la formule de Grassmann.

Exercice 3

On considère la fonction définie par $f(x) = xe^{(x^2)}$

1. L'étude montre que f définit une bijection impaire de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On note g sa réciproque. D'après le cours g est impaire et de classe C^∞ sur \mathbb{R} .
- 2.

$$f(x) = x + x^3 + x^5/2$$

en 0 à l'ordre 5.

3. On observe que $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$. g admet un développement à l'ordre 5 en 0 car elle est C^∞ . On le cherche sous forme indéterminée en posant $g(y) = ay + by^3 + cy^5 + o(y^5)$ pour $y \rightarrow 0$.
et on trouve :

$$g(y) = y - y^3 + \frac{5}{2}y^5$$

Problème

Soit $n \geq 2$ un entier, $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes réels de degré au plus n et $a < a_0 < a_1 < \dots < a_n < b$ une suite de réels distincts 2 à 2.

1. Cf cours : E_n est un espace vectoriel réel, $\dim(E_n) = n + 1$.

On pose pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$L_i = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$

2. La famille $L = (L_0, \dots, L_n)$ est libre (à prouver) et donc est une base de E_n .

Pour la suite, on fixe f une fonction définie sur \mathbb{R} de classe C^{n+1} sur $[a, b]$.

3. Le théorème d'interpolation de Lagrange, montre qu'il existe un unique polynôme noté P_f de degré au plus n tel que : $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$P_f(a_i) = f(a_i)$$

4. $P_f = \sum_{i=0}^n f(a_i)L_i$

On fixe $c \in [a, b]$ distincts des nombres $a_0 < \dots < a_n$, et on pose

$$g_c(x) = f(x) - P_f(x) - (f(c) - P_f(c)) \prod_{k=0}^n \frac{x - a_k}{c - a_k}$$

On pose

5. g_c s'annule en a_0, \dots, a_n et en c donc en au moins $n + 2$ points de $[a, b]$.

6. Par le théorème de Rolle g'_c s'annule en au moins $n + 1$ points de $[a, b]$, g''_c s'annule en au moins n points de $[a, b]$... $g_c^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois sur $[a, b]$.

7. Si ν est un point de $[a, b]$ en lequel $g_c^{(n+1)}$ s'annule alors :

$$f(c) - P_f(c) = \frac{f^{(n+1)}(\nu)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^n (c - a_k)$$

8. Le résultat précédent reste vrai si c est un des nombres a_0, \dots, a_n car alors les 2 quantités sont nulles.

9. $f^{(n+1)}$ étant continue sur le segment $[a, b]$, on peut poser : $\max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|$.

10. On obtient finalement finalement que :

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - P_f(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)| \max_{x \in [a, b]} \prod_{k=0}^n |x - a_k|$$