Fiche 57 : applications linéaires.

Exercice 1

Si $a_0 < a_1 < ... < a_n$ sont $n+1$ réels donnés, montrer que les formes définies sur $\mathbb{R}_n[X]$:

$$\delta_{a_i} : P \to P(a_i)$$

pour $i \in$
$llbracket 0, n\rrbracket$ forment une base de l'espace $\mathbb{R}_n[X]'$.
Déterminer la base duale associée.

Exercice 2

On considère l'espace $E = \mathbb{R}_3[X]$ et les applications suivantes définies sur E :

$$\delta_0 : P \to P(0)\ ,\ \delta_0' : P \to P'(0)\ ,\ \delta_1 : P \to P(1)\ ,\ \delta_1' : P \to P'(1)$$

1. Rappeler les dimensions de E et de E'.
2. Montrer que δ_0 δ_0', δ_1, δ_1' est une base de E'.
3. Construire la base duale associée.
4. En déduire l'existence et l'expression, pour une fonction f dérivable sur $[0,1]$ donnée, du spline cubique de f, c'est à dire d'un polynôme P de degré 3 tel que

$$P(0) = f(0), P(1) = f(1), P'(0) = f'(0), P'(1) = f'(1)$$

Exercice 3 : Polynômes de Bernoulli

On se place dans l'espace $E = \mathbb{R}[X]$.
On considère

$$H = \left\{ P \in E / \int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x = 0 \right\}$$

1. Montrer que H est un sous espace vectoriel de E.

   On considère l'application : $D : \begin{cases} H \to E \\ P \to P' \end{cases}$.
2. Montrer que D est une bijection, on note I sa réciproque.
3. On considère la suite définie par $B_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $B_{n+1} = I(B_n)$, autrement dit $B_n = B_{n+1}'$ et $B_{n+1} \in H$.
   (a) Déterminer B_0, B_1, B_2, B_3.
   (b) Montrer que la suite $((B_n))_{n\in\mathbb{N}}$ forme une base de E.