Fiche 58 : TD du 14-03.

Exercice 1

On considère dans l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^4$ les vecteurs :

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}2\\0\\4\\2\end{pmatrix}$$

$$w_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix} w_3 = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}, w_4 = \begin{pmatrix}2\\2\\2\\2\end{pmatrix}$$

1. Montrer que la famille (v_1, v_2) est libre et que la famille (v_1, v_2, v_3) est liée.
2. Montrer que la famille (w_1, w_2, w_3) est libre et que la famille (w_1, w_2, w_3, w_4) est liée.
3. Montrer que la famille (v_1, v_2, w_1, w_2) est libre.
4. Soit F le sous espace de vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par (v_1, v_2, v_3).
   (a) Donner une base et la dimension de F.
   (b) Donner un supplémentaire de F.
5. Soit G le sous espace de vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par (w_1, w_2, w_3, w_4) .
   Donner une base et la dimension de G.
6. A l'aide des questions précédentes, donner un système générateur de $F + G$ et montrer que $F + G = \mathbb{R}^4$.
7. F et G sont-ils supplémentaires ?
8. (a) Montrer que $v_1 + v_2$ est dans $F \cap G$.
   (b) Quelle est la dimension de $F \cap G$?
   (c) Donner une base de $F \cap G$.

Exercice 2

Déterminer le noyau, le rang, l'image de chacune des applications linéaires suivantes. En déduire celles qui sont injectives, surjectives, bijectives.

$$\begin{array}{rl} f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 & f_1(x, y) = (2x + y, x - y) \\ f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 & f_2(x, y, z) = (2x + y + z, y - z, x + y) \\ f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4 & f_3(x, y) = (y, 0, x - 7y, x + y) \\ f_4 : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3 & f_4(P) = \big(P(-1), P(0), P(1)\big) \end{array}$$

Exercice 3

Soit, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, et E l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Soit f l'application définie sur E par $f(P) = Q$ avec

$$Q(X) = P(X + 1) + P(X - 1) - 2P(X)$$

1. Montrer que f est une application linéaire de E dans E.
2. Pour P dans E, déterminer le degré de $f(P$ en fonction du degré de P. En déduire $\ker f$, $\operatorname{Im} f$ et le rang de f.
3. Soit Q un polynôme de $\operatorname{Im} f$; montrer qu'il existe un polynôme unique P tel que : $f(P) = Q$ et $P(0) = P'(0) = 0$.

Exercice 4

On considère E un espace vectoriel réel de dimension 3 et f un endomorphisme de E tel que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$ (par convention : $f^0 = Id_E$).
Montrer qu'il existe un vecteur e_1 de E tel que $f^2(e_1) \neq 0$. et que dans ce cas : $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est une base de E.
Déterminer le rang de f.