# Fiche 60 : Applications linéaires.

**Exercice 1**

Soit $E$ un espace vectoriel, et $u$ une application linéaire de $E$ dans $E$. Dire si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses :

1. Si $e_1, e_2, \ldots, e_p$ est libre, il en est de même de $u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_p)$.
2. Si $u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_p)$ est libre, il en est de même de $e_1, e_2, \ldots, e_p$.
3. Si $e_1, e_2, \ldots, e_p$ est génératrice, il en est de même de $u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_p)$.
4. Si $u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_p)$ est génératrice, il en est de même de $e_1, e_2, \ldots, e_p$.
5. Si $u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_p)$ est une base de $\mathrm{Im} u$, alors $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ est une base d'un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\mathrm{Ker} u$.

**Exercice 2**

Soit $E$ un espace vectoriel non nul. Soit $\lambda$ un réel et $p$ et $q$ 2 projecteurs de $E$ de même image $F$ un sous espace de $E$. Montrer que $\lambda p + (1-\lambda)q$ est un projecteur de $E$ d'image $F$.

**Exercice 3**

Soit $p$ et $q$ 2 projecteurs de $E$.
Montrer que $p+q$ est un projecteur de $E$ si et seulement si $pq = qp = 0$.

**Exercice 4**

Soit $E$ un espace vectoriel non nul. Soit $f$ un endomorphisme de $E$ tel que pour tout vecteur $x$ de $E$ la famille $(x, f(x))$ soit liée. Montrer que $f$ est une homothétie.

**Exercice 5**

Soit $E$ un espace de dimension finie. Trouver les endomorphismes (resp. automorphismes) de $E$ qui commutent avec tous les endomorphismes (resp. automorphismes) de $E$.
*Si $x \in E$, on pourra considérer le cas d'une symétrie par rapport à la droite engendrée par $x$ et appliquer le résultats précédent.*

**Exercice 6**

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f)$$

$$E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$$

$$\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f = \{0\}$$

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$$

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$$