Fiche 61 : TD du 21-03.

Exercice 1

On considère dans $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par (v_1, v_2, v_3) et G celui engendré par (w_1, w_2, w_3).

1. Donner des bases, les dimensions et des systèmes d'équations définissant F et G et $F + G$.
2. Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4;\ 4x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \right\}$. Montrer que $F + G = E$. La somme est-elle directe ? Quelle est la dimension de $F \cap G$?

Exercice 2

On considère $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - 3y - z \\ x + 2y + z \\ 4x + 5y + 3z \end{pmatrix}$.

Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et déterminer f^{-1}.

Exercice 3

Soient $P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; 2x + y - z = 0 \right\}$ et $D = \left\{ \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; 2x - 2y + z = 0, x - y - z = 0 \right\}$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. Soit p la projection de $\mathbb{R}^3$ sur P parallélement à D. Déterminer p et vérifier que $p^2 = p$.
3. Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à P parallélement à D. Déterminer s puis vérifier que $s^2 = Id$.

Exercice 4 : Polynômes de Bernstein

Pour $n \in \mathbb{N}$, et $0 \leq k \leq n$, on considère les polynômes :

$$B_{n,k} = \binom{n}{k} X^k (1 - X)^{n-k}$$

1. Représenter sur un même graphique les fonctions $B_{3,k}$ pour $k = 0, 1, 2, 3$ et $x \in [0, 1]$.
2. Étudier $B_{n,k}$ sur l'intervalle $[0, 1]$.
3. Calculer
$$\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}$$
En déduire que pour tout n et $0 \leq k \leq n$, $x \in [0, 1]$, $B_{n,k}(x) \leq 1$.
4. Vérifier
$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$
(domaine de la relation à préciser) en déduire : $\sum_{k=0}^{n} kB_{n,k}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
5. Calculer : $\sum_{k=0}^{n} k(k-1)B_{n,k}$.
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(B_{n,0}, B_{n,1}, \ldots, B_{n,n})$ est une base de l'espace $\mathbb{R}_n[X]$.
7. Déterminer les coordonnées de $(1, X, \ldots, X^n)$ dans la base précédente.