Fiche 62 : Intégration.

Exercice 1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, écrire $1/n$ comme une intégrale simple pour déterminer :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

Exercice 2

On considère la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$$

1. Déterminer le sens de variation de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et montrer que $I_n \to 1$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $1 - I_n$, faire une intégration par parties et en déduire que :

$$I_n = 1 - \frac{\ln(2)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 3

1. (a) Montrer que, pour tout $i \geq 2$,

$$\int_{i-1}^{i} \ln(t)\,dt \leq \ln(i) \leq \int_{i}^{i+1} \ln(t)\,dt.$$

   (b) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\int_1^n \ln(t)\,dt \leq \ln(n!) \leq \int_1^n \ln(t)\,dt + \ln(n).$$

2. Pour tout $x > 0$, calculer $F(x) = \int_1^x \ln t\,dt$.
3. En déduire que $\ln(n!)$ est équivalent à $n\ln(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 4 : Intégrales de Wallis

On pose, si $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)dt$$

1. Calculer u_0, u_1, u_2 et u_3.
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et converge vers un réel l.
3. Établir une relation de récurrence entre u_n et u_{n-2} pour $n \geq 2$.
4. En déduire une expression de u_{2n} et u_{2n+1} à l'aide de factorielles, de puissances de 2 et de π.
5. Montrer que, si $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{2n}.u_{2n+1} = \frac{\pi}{2(2n+1)}$$

6. En déduire la valeur de l.
7. Montrer que $u_{2n} \sim u_{2n+1}$ puis le fait que :

$$u_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$