Devoir surveillé n° 1

Durée : 1 heure

L'usage de calculatrices est interdit. — Aucun document n'est autorisé.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le but de ce problème est d'examiner la correction et la complexité d'un algorithme de tri par sélection. On rappelle le principe de cet algorithme. Pour trier un tableau de taille n, on sélectionne le plus petit des n éléments du tableau, et on l'échange avec le premier élément, puis on sélectionne l'élément le plus petit parmi les $n-1$ restants, et on l'échange avec le deuxième élément du tableau, et ainsi de suite $n-1$ fois de suite.

1 Recherche du minimum dans une partie du tableau

On donne-ci dessous une première fonction Python, qui, prenant en paramètres une liste de nombre entiers ou flottants L de taille n et un entier k, détermine l'indice $imin$ de l'élément minimum de la liste $[L[k], L[k+1], \ldots, L[n-1]]$.

```
def imin(L,k):
        imin=k
        for i in range(k+1,len(L)):
                if L[i]<L[k]:
                        imin=i
        return(imin)
```

Question 1.1. *Proposez des préconditions et postconditions pour l'algorithme implémenté ci-dessus.*

Question 1.2. *On note $P(i)$ la propriété « $L[imin]$ est le minimum de $[L[k], L[k+1], \ldots, L[i]]$ ». Montrer que $P(i)$ est un invariant vérifié en fin de boucle. (On supposera par convention que k est égal à i avant le premier passage dans la boucle.)*

Question 1.3. *Justifier rapidement que l'algorithme termine et prouver sa correction.*

On note désormais $T(n,k)$ le nombre de tests effectués par la fonction pour déterminer le minimum de $[L[k], L[k+1], \ldots, L[n-1]]$, où L est une liste de taille n.

Question 1.4. *Déterminer $T(n,k)$ en fonction de n et k.*

2 Le tri par sélection

On donne maintenant une fonction Python prenant en entrée une liste L et la triant par sélection.

```
def TriSelection(L):
        for k in range(len(L)):
                i=imin(L,k)
                L[k],L[i]=L[i],L[k]
```

Question 2.1. *Proposer des préconditions et postconditions pour l'algorithme de tri par sélection.*

Question 2.2. *On note $Q(k)$ la propriété « Le tableau $[L[0], L[1], \ldots, L[k+1]]$ est trié ». Montrer que $Q(k)$ est un invariant de fin de boucle. (On supposera par convention que $k=-1$ avant la première exécution de la boucle.)*

Question 2.3. *Justifier rapidement que l'algorithme termine et montrer sa correction.*

Question 2.4. *On note $U(n)$ le nombre de test effectué par l'algorithme. Calculer $U(n)$ et en déduire la complexité asymptotique du tri pas insertion.*

— Fin de l'énoncé —