Fiche 63 : TD du 28/03.

Exercice 1

Calculer les intégrales de fractions rationnelles suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+3}$.
2. $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{1-x^2}$.
3. $\displaystyle\int_2^3 \frac{4x^2}{x^4-1}\,dx$.

Exercice 2

Déterminer la valeur de l'intégrale :

$$I = \int_0^3 \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}+1}$$

en effectuant le changement de variable : $u = \sqrt{x+1}+1$ qu'on justifiera proprement.

Exercice 3

On considère la fonction définie par :

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2/2} dt$$

1. Montrer que f est impaire sur $\mathbb{R}$ et faire son étude.
2. Montrer que f est majorée sur $\mathbb{R}$ et en déduire qu'elle admet une limite finie en $+\infty$ (on ne demande pas de préciser cette limite).
3. Représenter sommairement f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4

Soient $a < b$ réels, $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ et

$$I_n = \int_a^b f(t)\sin(nt)dt$$

À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_n \to 0$ pour $n \to \infty$.

Exercice 5

Soit $f \in C^2([a,b],\mathbb{R})$ $(a < b)$.

1. Montrer que $\int_a^b f(t)dt = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) + \frac{1}{2}\int_a^b f''(t)(a-t)(b-t)dt$.
2. En déduire un encadrement de $\int_a^b f(t)dt$ si $\forall x \in [a,b]$ $|f''(x)| \leq M$.