Fiche 63 : intégration.

Exercice 1

Montrer la convergence et calculer la limite de la suite :

$$x_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(n+n)}$$

On pensera à ln *et aux sommes de Riemann.*

Exercice 2 : Inégalité de Kolmogorov

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que f et f'' sont bornées, et l'on pose :

$$M_0 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|, \quad M_2 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|$$

Le but de cet exercice est de prouver que f' est bornée, et de majorer $M_1 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)|$ en fonction de M_0 et M_2. Soit $x \in \mathbb{R}$, et $h > 0$.

1. Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à f entre x et $x+h$ à l'ordre 2.
2. En déduire l'inégalité :
$$|f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}.$$
3. Étudier la fonction $h \mapsto \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$ sur $]0, +\infty[$.
4. En déduire
$$M_1 \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$$

Exercice 3 : Formule d'Euler-Mac Laurin

1. Montrer qu'il existe des polynômes (H_0, H_1, H_2, H_3) à préciser tel que :
$$\begin{cases} H_0 = 1 \\ \text{pour } i = 1,2,3 : H_i' = H_{i-1} \text{ et } \int_0^1 H_i(t)\,\mathrm{d}t = 0 \end{cases}$$
Préciser $b_i = H_i(0)$ et $H_i(1)$ pour $i = 0, 1, 2, 3$.
2. Montrer que si f est C^3 sur $\mathbb{R}$:
$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{f(0)+f(1)}{2} - b_2(f'(1) - f'(0)) - \int_0^1 H_3(x) f^{(3)}(x)\,\mathrm{d}x$$