Fiche 64 : TD du 04-04.

Exercice 1

Effectuer le changement de variables $u = \sqrt{e^x - 1}$ pour calculer :

$$I = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx$$

Problème

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\, \mathrm{d}t$$

Partie A : Intégrales de Wallis

1. Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et décroissante.
2. Montrer (on pourra procéder par intégrations par parties) que, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$$

3. En déduire que pour $n \in \mathbb{N}$: $1 \leq \dfrac{W_n}{W_{n+1}} \leq \dfrac{n+2}{n+1}$.

   On pose pour $n \in \mathbb{N}$: $u_n = (n+1)W_{n+1}W_n$.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et déterminer sa valeur.
5. En déduire que pour $n \to \infty$:

$$W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

Partie B : Intégrale de Gauss

6. Montrer que pour $x \in]-1, +\infty[$, on a :

$$\ln(x+1) \leq x$$

7. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq t \leq \sqrt{n}$:

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$$

8. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, par le changement de variable $t = \sqrt{n}\cos(u)$ montrer que :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \sqrt{n}\, W_{2n+1}$$

9. De même , en posant $t = \frac{\sqrt{n}\cos(u)}{\sin(u)}$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t = \sqrt{n} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^{2n-2}(u)\, \mathrm{d}u$$

10. Conclure en donnant la limite de la suite : $u_n = \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t$

*Cette limite est notée : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t$ et est appelée **intégrale de Gauss***