

Fiche 65, suite : intégrales.

Exercice 1

Déterminer en fonction de $z \in \mathbb{C}$ la nature et la somme éventuelle des séries (*On pourra utiliser la formule de Taylor Lagrange*) :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} z^n, \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$$

Exercice 2

Étudier la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

On établira son tableau de variations en montrant qu'elle admet en $+\infty$ et $-\infty$ des limites et un minimum sur $\mathbb{R}$ sans chercher à déterminer les valeurs de ces limites et de ce minimum.

Exercice 3

On considère la fonction G définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$G(x) = \int_x^{2x} \frac{\cos(t) dt}{t}$$

1. Déterminer G' .
2. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer la limite de $+\infty$.
3. Étudier le comportement de $\int_x^{2x} \frac{(\cos(t)-1) dt}{t}$ pour déterminer la limite de G en 0^+ .

Exercice 4

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ Montrer que si $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{d^{(n+1)}}{dx^{(n+1)}} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t) dt = f(x)$$