Sup MPSI, Lycée Jean Perrin, 2023-2024.

DS 8, 05-04, Durée 2 h 45, Calculatrices interdites.

Exercice 1

Soit P l'application suivante : $\begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2x-y \\ 2x-y \end{pmatrix} \end{cases}$

1. Montrer que P est une application linéaire.
2. Montrer que P est un projecteur de $\mathbb{R}^2$ et identifier son image et son noyau.

Exercice 2

Soient $P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 ; 2x + y - z = 0 \right\}$ et $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 ; 2x - 2y + z = 0, x - y - z = 0 \right\}$.

1. Justifier que P est un sous espace de $\mathbb{R}^3$ (*on admet que D est un sous espace de* $\mathbb{R}^3$).
2. Donner une base de P et une base de D. Montrer que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
3. Soit p la projection de $\mathbb{R}^3$ sur P parallélement à D. Déterminer $p(v)$ si $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$
4. Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à P parallélement à D. Déterminer $s(v)$ si $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

Exercice 3

Le but de cette exercice est de déterminer la limite pour $n \to +\infty$ de la suite :

$$\left(\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

On pose pour $n \in \mathbb{N}$:

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } J_n = \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Déterminer W_0 et W_1.
2. Montrer que si $n \in \mathbb{N}$:
$$W_n - W_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \sin(t)\sin(t)\cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t$$
3. En déduire que si $n \in \mathbb{N}$:
$$(2n+2)W_{n+1} = (2n+1)W_n$$

4. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$:

$$J_n - J_{n+1} = \frac{1}{2n+1} J_{n+1} + \frac{2}{2n+1} \int_0^{\pi/2} t \sin(t) \cos^{2n+1}(t)\, \mathrm{d}t$$

5. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right) J_{n+1} - J_n = \frac{-2}{(2n+1)(2n+2)} W_{n+1}.$$

6. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{J_{n+1}}{W_{n+1}} - \frac{J_n}{W_n} = \frac{-2}{(2n+2)^2}$$

7. Conclure que si $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{J_n}{W_n} - \frac{J_0}{W_0} = \frac{-1}{2} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2}$$

8. Montrer que si $t \in [0, \pi/2]$:

$$\frac{2}{\pi} t \leq \sin(t) \leq t.$$

9. En déduire que si $n \in \mathbb{N}$:

$$0 < J_n \leq \frac{\pi^2}{4}(W_n - W_{n+1})$$

   puis

$$0 < J_n \leq \frac{\pi^2 W_n}{8(n+1)}$$

10. En déduire la limite de la suite : $\left(\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ pour $n \to +\infty$.

Exercice 4

On considère la fonction $f(x)$ définie pour $x \in]-\pi, \pi[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{dv}{\cos(v/2)}$$

1. Montrer que f est bien définie et dérivable sur l'intervalle proposé et calculer $f'(x)$ pour x dans cet intervalle.
2. Montrer que f est strictement croissante sur l'intervalle $]-\pi, \pi[$ et impaire.
3. Faire le changement de variable $t = \sin(v/2)$ dans l'intégrale et en déduire une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.
4. Donner alors le tableau de variations de f et en déduire qu'elle définit une bijection de $]-\pi, \pi[$ sur $\mathbb{R}$ à réciproque dérivable.

   On note g sa réciproque (*dont on ne cherchera pas d'expression explicite*). Rappelons que dans ces conditions, si $x \in]-\pi, \pi[$ et $y \in \mathbb{R}$ alors $y = f(x)$ est équivalent à $x = g(y)$. On rappelle aussi que, toujours dans ces conditions g est dérivable en y et : $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$.

5. Montrer que si $y \in \mathbb{R}$: $g'(y) = 2\cos\left(\frac{g(y)}{2}\right)$. Calculer $g(0)$, $g'(0)$ et $g''(y)$ pour $y \in \mathbb{R}$.
6. Montrer que g vérifie, pour tout $y \in \mathbb{R}$, la relation : $g''(y) + \sin(g(y)) = 0$.