Sup MPSI, Lycée Jean Perrin, 2023-2024.

DS 8, Correction.

Exercice 1

Soit P l'application suivante : $\begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2x-y \\ 2x-y \end{pmatrix} \end{cases}$

1. P est une application linéaire.
2. On observe que $P \circ P = P$ et $\operatorname{Im}(P) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $\operatorname{Im}(P) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$.

Exercice 2

Soient $P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 ; 2x + y - z = 0 \right\}$ et $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 ; 2x - 2y + z = 0, x - y - z = 0 \right\}$.

1. P est un sous espace de $\mathbb{R}^3$ (*on admet que D est un sous espace de* $\mathbb{R}^3$).
2. $P = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On a une base.

   $D = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. On a une base.

   Par raison de dimension et d'intersection : $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
3. Soit p la projection de $\mathbb{R}^3$ sur P parallélement à D.

$$p \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} x - y + z \\ -2x + 2y + z \\ 3z \end{pmatrix}$$

4. Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à P parallélement à D.

$$s \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -x - 2y + 2z \\ -4x + y + 2z \\ 3z \end{pmatrix}$$

Exercice 3

Le but de cette exercice est de déterminer la limite pour $n \to +\infty$ de la suite :

$$\left(\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

On pose pour $n \in \mathbb{N}$:

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } J_n = \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t$$

1. $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = \frac{\pi}{4}$.
2. Par la formule de Pythagore : si $n \in \mathbb{N}$:
$$W_n - W_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \sin(t)\sin(t)\cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t$$
3. On intègre par parties la formule précédente : ce qui donne : $W_n - W_{n+1} = \frac{W_{n+1}}{2n+1}$
Puis si $n \in \mathbb{N}$:
$$(2n+2)W_{n+1} = (2n+1)W_n$$
4. Une intégration par parties en dérivant $t^2\sin(t)$ montre que si $n \in \mathbb{N}$:
$$J_n - J_{n+1} = \frac{1}{2n+1}J_{n+1} + \frac{2}{2n+1}\int_0^{\pi/2} t\sin(t)\cos^{2n+1}(t)\,\mathrm{d}t$$
5. A nouveau une intégration par parties : pour $n \in \mathbb{N}$:
$$\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)J_{n+1} - J_n = \frac{-2}{(2n+1)(2n+2)}W_{n+1}.$$
6. Puis à partir de la relation précédente : si $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\frac{J_{n+1}}{W_{n+1}} - \frac{J_n}{W_n} = \frac{-2}{(2n+2)^2}$$
7. On fait une somme télescopique de la relation précédente ou une récurrence :
$$\frac{J_n}{W_n} - \frac{J_0}{W_0} = \frac{-1}{2}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^2}$$
8. Par concavité du sin sur $[0, \pi/2]$ ou étude de fonction : si $t \in [0, \pi/2]$:
$$\frac{2}{\pi}t \leq \sin(t) \leq t.$$
9. On utilise le fait que $t \leq \sin^2(t)\frac{\pi^2}{4}$ pour, par intégration en déduire que si $n \in \mathbb{N}$:
$$0 < J_n \leq \frac{\pi^2}{4}(W_n - W_{n+1})$$
puis avec la relation entre W_n et W_{n+1} :
$$0 < J_n \leq \frac{\pi^2 W_n}{8(n+1)}$$
10. Ainsi $J_n/W_n \to 0$ et
$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^2} = \frac{2J_0}{W_0} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 4

On considère la fonction $f(x)$ définie pour $x \in]-\pi, \pi[$ par :
$$f(x) = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{dv}{\cos(v/2)}$$

1. Par le théorème fondamental de l'analyse (il n'y a pas de valeur interdite) f est bien définie et dérivable sur l'intervalle proposé et

$$f'(x) = \frac{1}{2\cos(x/2)} > 0$$

2. f est strictement croissante sur l'intervalle $]-\pi, \pi[$ et impaire par symétrie.
3. $t = \sin(v/2)$, $dt = \frac{1}{2}\cos(v/2)dv$ (changement C^1 en fonction de v).

$$f(x) = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{dv}{\cos(v/2)} = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{\cos(v/2)dv}{1-\sin^2(v/2)} = \int_0^{\sin(x/2)} \frac{dt}{1-t^2} = \ln\left(\frac{1+\sin(x/2)}{1-\sin(x/2)}\right)$$

   dans l'intégrale et en déduire une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.
4. On observe alors que $f(x) \to +\infty$ en π de plus sa dérivée ne s'annule pas.
   Le tableau de variations de f montre qu'elle définit une bijection de $]-\pi, \pi[$ sur $\mathbb{R}$ à réciproque dérivable.

   On note g sa réciproque (*dont on ne cherchera pas d'expression explicite*). Rappelons que dans ces conditions, si $x \in]-\pi, \pi[$ et $y \in \mathbb{R}$ alors $y = f(x)$ est équivalent à $x = g(y)$. On rappelle aussi que, toujours dans ces conditions g est dérivable en y et : $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$.
5. Si $y \in \mathbb{R}$:

$$g'(y) = \frac{1}{\frac{1}{2\cos(g(y)/2)}} = 2\cos\left(\frac{g(y)}{2}\right)$$

   $g(0) = 0$, $g'(0) = 2$
   $g''(y) = -g'(y)\sin\left(\frac{g(y)}{2}\right) = -2\cos\left(\frac{g(y)}{2}\right)\sin\left(\frac{g(y)}{2}\right)$
6. Par l'arc double, pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$g''(y) + \sin(g(y)) = 0$$