

Fiche 69 : TD du 02-05.

Exercice 1

1. On rappelle que la série harmonique alternée converge et a pour somme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln(1/2).$$

Montrer la convergence des deux séries $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right)$ et $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k} \right)$ et calculer leur somme à l'aide du rappel ci dessus.

2. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{4x^3-x}$.
3. Montrer la convergence de la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^3-k}$ et calculer sa somme à l'aide de ce qui précède.

Exercice 2

Classer les séries $\sum u_n$ suivantes en 4 catégories

- GD : celles telles que u_n ne tend pas vers 0 ;
- ZD : celles qui divergent et telles que $\lim u_n = 0$;
- AC : celles qui convergent absolument ;
- SC : celles qui convergent, mais non absolument.

(Attention : pour pouvoir répondre, certaines séries demandent deux démonstrations : par exemple pour montrer que $\sum u_n$ est SC, il faut montrer que $\sum u_n$ converge et que $\sum |u_n|$ diverge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2} \right); \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}); \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^2;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right]; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 1000}{3^n + 1}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \left(\frac{\pi}{n} \right) \right); \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \frac{1}{3^{n-k}} \right).$$

Exercice 3

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs.

On suppose que $\lim \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = l \in \mathbb{R}_+ \cup +\infty$.

1. Montrer que si $l < 1$, la série de terme général (u_n) converge.
2. Montrer que si $l > 1$, la série de terme général (u_n) diverge.
3. Montrer que si z est complexe avec $|z| < \frac{1}{l}$ alors la série de terme général $(u_n z^n)$ converge.
4. En déduire les conditions de convergence des séries (k est un entier relatif et z est un complexe) :

$$\sum_{n \geq 0} n^k z^n$$

Exercice 4

Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$|e^z - 1| \leq e^{|z|} - 1 \leq |z| e^{|z|}$$