Fiche 72 : Matrices.

Exercice 1

On considère la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 14 & -10 & 4 \\ 16 & -10 & 3 \end{pmatrix}$$

et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé.

1. Montrer que les espaces $E_1 = \ker(f + Id)$, $E_2 = \ker(f - Id)$ et $E_3 = \ker(f + 2Id)$ sont des droites vectorielles et déterminer des vecteurs non nuls v_1 de E_1, v_2 de E_2 et v_3 de E_3.
2. Montrer que $B = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer la matrice D de f dans la base B.
4. Déterminer la matrice A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2

On considère la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

représentant dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ l'endomorphisme u.

1. Calculer $\ker(A - 2I_3)$ et $\ker(A - 3I_3)$ en donnant des bases de ces espaces.
2. Montrer que la réunion des 2 bases précédentes est une base B de $\mathbb{R}^3$.
3. Préciser la matrice D de u dans la base B.

Exercice 3 : Matrice d'adjacence d'un graphe

On considère G un *graphe* à n sommets c'est à dire un ensemble $S_1, \dots, S_n$ de *sommets* reliés ou non entre eux par des *arêtes* (on parle de sommets *adjacents* si c'est le cas). Un sommet n'est jamais adjacent à lui même.
On note $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i \leq n, 1 \leq i \leq n}$ sa *matrice d'adjacence* en posant pour $1 \leq i \leq n, 1 \leq i \leq n$: $a_{i,j} = a_{j,i} = 1$ quand S_i et S_j sont adjacents.
On appelle *chemin* c de longueur $p > 0$, une suite $(S_{c(k)})_{k \in [\![0,p]\!]}$ de sommets tel que 2 sommets consécutifs de la suite sont adjacents. On dit qu'un tel chemin *va de* $S_{c(0)}$ *à* $S_{c(p)}$. p est la *longueur* du chemin.

1. Montrer que pour $p \in \mathbb{N}^*$, $A^p = [n_{i,j}]_{1 \leq i \leq n, 1 \leq i \leq n}$ où, pour $1 \leq i \leq n, 1 \leq i \leq n$, $n_{i,j}^{(p)}$ est le nombre de chemins de longueur p allant du sommet S_i au sommet S_j.
2. Un *triangle* dans un graphe est un groupe de 3 sommets distincts 2 à 2 et 2 à 2 adjacents. Montrer que G contient un triangle si et seulement si on peut trouver dans A et A^2 deux coefficients non nuls à la même place.
3. Un graphe est *connexe* quand 2 quelconques de ses sommets distincts peuvent être reliés par au moins un chemin.
   (a) Montrer que dans si G est connexe alors 2 quelconques de ses sommets distincts peuvent être reliés par au moins un chemin de longueur au plus $n - 1$.
   (b) Montrer que G est connexe si et seulement si la matrice $(I_n + A)^{n-1}$ ne comporte aucun 0.