

Fiche 73 : Matrices.

Exercice 1

Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'application de $M_2(\mathbb{R})$ dans lui-même $M \mapsto AM$. Montrer que f est linéaire. Déterminer sa matrice dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.

Exercice 2 : D'après CCINP-MPI 2023

On identifie ici les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associés.

On considère les matrices

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Pi_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \Pi_1 + 5\Pi_2$$

1. Montrer que Π_1 et Π_2 sont les projecteurs associés à une décomposition de l'espace $\mathbb{R}^2$ qu'on précisera.
2. En déduire une expression simple de A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ **nilpotent d'indice** $p \geq 2$, c'est à dire tel que $f^{p-1} \neq 0$ et $f^p = 0$.

1. Montrer que si v est un vecteur de E tel que $f^{p-1}(v) \neq 0$ alors la famille $(v, f(v), \dots, f^{p-1}(v))$ est une famille libre. En déduire que $p \leq n$.
2. Montrer que si $p = n$ et v est un vecteur de E tel que $f^{n-1}(v) \neq 0$ alors la famille $(v, f(v), \dots, f^{n-1}(v))$ est base de E , et préciser la matrice de f dans cette base.