Fiche 74 : Matrices.

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = A + 2I_3$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 2

Soit $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $A(\theta) \times A(\theta')$ et $\big(A(\theta)\big)^n$ pour $n \geq 1$.

Exercice 3

Soit E un espace à n dimensions et f un endomorphisme de E tel que $f^2 = 0$.

1. Soit E_1 un supplémentaire de $\ker f$ dans E et soit $(e_1, e_2, \ldots, e_r)$ une base de E_1. Montrer que la famille des vecteurs $(e_1, e_2, \ldots, e_r, f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_r))$ est libre. On peut la compléter, si nécessaire, par des vecteurs de $\ker f$ de façon à obtenir une base de E. Quelle est la matrice de f dans cette base ?
2. Exemple : Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $f^2 = 0$. Déterminer une nouvelle base dans laquelle la matrice de f a la forme indiquée dans la question précédente.

Exercice 4

$A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall i = 1, \ldots, n \qquad |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \,.$$

En considérant son noyau, montrer que A est inversible.