Fiche 77 : TD du 23-05.

Exercice 1

On considère la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

représentant l'endomorphisme u dans la base canonique notée (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.

1. Calculer $\ker(A - I_3)$ et $\ker(A - 2I_3)$ et $\ker(A - 3I_3)$ en donnant des bases de ces espaces.
2. Montrer que la réunion des 3 bases précédentes est une base B de $\mathbb{R}^3$ et écrire la matrice de passage P associée.
3. Préciser la matrice D de u dans la base B.
4. Calculer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
5. En déduire la valeur, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, de A^n.

Exercice 2

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $u_0 = 1$; $v_0 = 0$ et $w_0 = 0$ et pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} = v_n + w_n \\ w_{n+1} = -u_n + v_n + w_n \end{cases} \qquad X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

On note : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé.

On considère les éléments suivants de $\mathbb{R}^3$: $b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,$b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $B = (b_1, b_2, b_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que la matrice de f dans la base B est : $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. On note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à B.
   Préciser P^{-1} et déterminer une relation entre A, P, T, P^{-1}.
4. On note $T = N + D$, où D est une matrice diagonale et où $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Que vaut N^n pour un entier $n \geq 2$?
5. Déduire de ce qui précède une expression de T^n *On pourra utiliser la formule du binôme..*
6. Pour $n \in \mathbb{N}$, établir une relation entre X_{n+1}, A et X_n.
7. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de X_n en fonction de A, n et X_0.
8. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, A^n en fonction de T^n, P et P^{-1}.
9. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n, v_n et de w_n en fonction de n.

Exercice 3

On identifie ici les matrices carrées réelles d'ordre 2 et les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associés.

1. On considère la matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et le problème (P) suivant :

$$(P) \ : \text{Déterminer les matrices } X \text{ de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ tel que } X^2 = D.$$

   (a) Donner 4 solutions au problème (P).

   (b) On considère X une solution quelconque du problème (P).
   Montrer que $XD = DX$ et en déduire que X est une matrice diagonale.

   (c) Conclure en donnant l'ensemble des solutions du problème (P).

2. Montrer que le problème d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : X^2 = I_2$ a une infinité de solutions (on ne demande de les donner toutes explicitement).

3. On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer M^2 et montrer que toute matrice X semblable à M vérifie $X^2 = -I_2$.

4. Montrer qu'il n'existe pas de matrice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.