

Fiche 78 : Probabilités.

Exercice 1

X_1 et X_2 sont (les variables aléatoires correspondant à) deux dés à 6 faces non pipés indépendants et Y est leur min, Z leur max.

1. Déterminer pour $x \geq 1$: $F_Z(x) = \mathbb{P}(Z \leq x)$. En déduire la loi de Z .
2. Procéder de même pour déterminer la loi de Y .
3. Y et Z sont-ils indépendants ?

Exercice 2 : Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

On étudie une marche aléatoire sur l'axe réel.

Pour $t = 0$, la particule est au point O d'abscisse nulle et pour chaque unité de temps (indépendamment des déplacements précédents) :

- l'abscisse de la particule augmente de 1 avec probabilité $\frac{1}{2}$.
- l'abscisse de la particule diminue de 1 avec probabilité $\frac{1}{2}$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $X_k = 1$ si on se déplace vers la droite et $X_k = -1$ sinon.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note S_n la variable aléatoire représentant l'abscisse de la particule au temps $n \in \mathbb{N}$.

1. Pour $k \in \mathbb{N}$: donner la loi de X_k , son espérance et sa variance.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$ relier S_{2n} aux variables (X_k) en déduire sa loi, son espérance, sa variance (On remarquera que S_{2n} est un entier pair).
3. Pour n et m entiers non nuls, déterminer $\text{cov}(S_n, S_{n+m})$, Les variables S_n et S_m sont-elles indépendantes ?

Exercice 3 : Fonction génératrice

On considère X une variable à valeurs entières sur un univers fini Ω .

On pose, si s est réel :

$$g_X(s) = \sum_{n \in \mathbb{N}} s^n \mathbb{P}(X = n)$$

g est la **fonction génératrice** de la variable X .

1. Montrer que la somme précédente est finie et définit donc un polynôme.
2. Montrer que si n est entier :

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{n!} g_X^{(n)}(0)$$

3. Montrer que si n est entier :

$$\mathbb{E}(X) = g'_X(1)$$

4. Déterminer la fonction génératrice d'une variable de Bernoulli : $B(p)$, $p \in]0, 1[$.
5. Montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires entières et indépendantes alors

$$g_{X+Y} = g_X g_Y$$

6. Déterminer la fonction génératrice d'une loi uniforme sur $\llbracket 1, 6 \rrbracket$.
7. Déterminer la fonction génératrice de la somme de 2 variables indépendantes de lois uniformes sur $\llbracket 1, 6 \rrbracket$.
8. Montrer qu'on ne peut pas truquer 2 dés classiques à 6 faces de sorte que leur somme satisfasse une loi uniforme sur $\llbracket 2, 12 \rrbracket$.
9. On considère maintenant des dés non pipés X'_1 et X'_2 mais dont les faces sont numérotées respectivement : 1, 2, 2, 3, 3, 4 et 1, 3, 4, 5, 6, 8. Quelles sont les lois et les fonctions génératrices des variables aléatoires X'_1 , X'_2 et $X'_1 + X'_2$.