Sup MPSI, Lycée Jean Perrin, 24 Mai 2024.

DS 9, Durée 2 h 30, calculatrices interdites.

Exercice 1

On considère u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -10 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les noyaux : $\ker(A - 2I_3)$, $\ker(A + 2I_3)$ et $\ker(A - 4I_3)$.
2. Montrer que la réunion des 3 bases précédentes forme une base $\mathcal{B}$ de l'espace $\mathbb{R}^3$ et écrire la matrice P de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$.
3. Écrire la matrice D de u dans la base $\mathcal{B}$ et vérifier qu'elle est diagonale. Préciser la relation qui lie P, P^{-1}, A et D (on ne demande pas de calculer P^{-1} ici).
4. Calculer, si n est un entier naturel non nul la matrice A^n.
5. Montrer que si $N \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ alors $ND = DN$ si et seulement N est diagonale.
6. Montrer que si $M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ alors $MA = AM$ si et seulement la matrice $N = P{-}1MP$ vérifie $ND = DN$.
7. En déduire que l'ensemble $C_A = (M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})/MA = AM)$ est un sous espace vectoriel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de dimension 3 dont la famille $\{I_3, A, A^2\}$ est une base.
8. Vérifier la relation : $A^3 - 4A^2 - 4A + 16I_3 = 0$. *On pourra utiliser la matrice D.*
9. Montrer que les matrices A^3 et A^{-1} (dont on justifiera l'existence) appartiennent à C_A et donner leur expression dans la base (I_3, A, A^2)

Exercice 2

On considère la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

ainsi que $\alpha < \beta$ les racines du polynôme $X^2 - X - 1$.

1. Déterminer α et β, vérifier que $|\alpha| < |\beta|$ et rappeler l'expression, pour $n \in \mathbb{N}$, de F_n en fonction de n, α et β.
2. Montrer que si $z \in \mathbb{C}$ vérifie $|z| < 1/|\beta|$ alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} F_n z^n$ est absolument convergente.

Pour la suite, on fixe $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < 1/|\beta|$ et on pose

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n$$

3. Écrire $(1 - z - z^2)f(z)$ sous la forme d'une somme d'une série et en déduire que :

$$f(z) = \frac{1}{1 - z - z^2}$$

Exercice 3

Dans cet exercice , on se place dans l'espace vectoriel E des matrices carrées réelles d'ordre 2 (2 lignes et 2 colonnes). On note I_2 la matrice identité de E.

On considère sur E l'application linéaire

$$\mathrm{Tr}\begin{cases} E \to \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to a+d \end{cases}$$

(on ne demande pas de justifier le caractère linéaire de cette application).

1. Comment s'appelle ce type d'application linéaire ?
2. Déterminer la dimension du noyau $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$.
3. Montrer rapidement que $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) \oplus \mathrm{Vect}(I_2) = E$.
4. Montrer que si A et B sont 2 matrices quelconques de E alors :

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$$

On considère à partir de maintenant les matrices :

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Rappeler pourquoi la famille $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ est une base de l'espace E.
6. Déterminer les produits : $E_{12}.E_{21}$, $E_{21}.E_{12}$, $E_{12}.E_{22}$, $E_{22}.E_{12}$, $E_{12}.E_{11}$, $E_{11}.E_{12}$.
7. On considère maintenant une application linéaire f définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $f(I_2) = 2$ et si A et B sont 2 matrices quelconques de E alors :

$$f(AB) = f(BA)$$

   Montrer que $f = \mathrm{Tr}$