Sup MPSI, Lycée Jean Perrin, 24 Mai 2024.

# DS 9, Durée 2 h 30, calculatrices interdites.

**Exercice 1**

On considère $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -10 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. $\ker(A - 2I_3)$ a pour base : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

   $\ker(A + 2I_3)$a pour base : $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

   $\ker(A - 4I_3)$ a pour base : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$,

2. La famille est libre donc la réunion des 3 bases précédentes forme une base $\mathcal{B}$ de l'espace $\mathbb{R}^3$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$.
3. $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ de $u$ dans la base $\mathcal{B}$.
   $D = P^{-1}AP$.
4. $P$ est inversible et

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^n + 4^n & -2.2^n + 4.(-2)^n - 2.4^n & 2^n - 4^n \\ 0 & 2.(-2)^n & 0 \\ 2^n - 4^n & -2.2^n + 2.4^n & 2^n + 4^n \end{pmatrix}$$

5. $N \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ si $ND = DN$ alors $\ker(D - 2I_3)$, $\ker(D + 2I_3)$ et $\ker(D + 4I_3)$ sont stables par $N$ ce qui montrer que la matrice $N$ est diagonale. La réciproque ne pose pas de problème.
6. Montrer que si $M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ alors $MA = AM$ si et seulement $P^{-1}MP.P^{-1}AP = P^{-1}AP.P^{-1}MP$ c'est à dire si et seulement si : la matrice $N = P^{-1}MP$ vérifie $ND = DN$ et donc est diagonale.
7. L'ensemble $C_A = (M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})/MA = AM)$ est un sous espace vectoriel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.
   D'après la question précédente l'application linéaire $M \mapsto P^{-1}MP$ réalise un isomorphisme de $C_A$ sur les matrices diagonales, espace de dimension 3. Donc $C_A$ est un espace de dimension 3.
   Les matrices $(I_3, A, A^2)$ appartiennent à A et forment une famille libre. on a donc une base de $C_A$.

8. Il est facile de vérifier $D^3-4D^2-4D+16I_3=0$ donc par changement de base : $A^3-4A^2-4A+16I_3=0$.
9. $$A^3 = 4A^2+4A-16I_3$$
   et
   $$A^{-1} = \frac{1}{16}(-A^2+4A+4I_3)$$

**Exercice 2**

On considère la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $F_0=1$, $F_1=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ :

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

ainsi que $\alpha<\beta$ les racines du polynôme $X^2-X-1$.

1. $\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. On a $|\alpha| = \frac{\sqrt{5}-1}{2} < \beta = |\beta|$ et, pour $n\in\mathbb{N}$,
   $$F_n = \frac{5+\sqrt{5}}{10}\alpha^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\beta^n$$
2. Si $z\in\mathbb{C}$ vérifie $|z|<k<1/|\beta|$
   $|F_nz^n| = O(k^n|\beta|^n) = O((k|\beta|)^n)$. Or la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(k|\beta|)^n$ est absolument convergente car $|k\beta|<1$.

Pour la suite, on fixe $z\in\mathbb{C}$ vérifiant $|z|<1/|\beta|$ et on pose

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_nz^n$$

3. On écrit que des séries absolument convergentes :
   $$(1-z-z^2)f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(F_nz^n - F_nz^{n+1} - F_nz^{n+2}) = F_0 - F_0z + F_1z + \sum_{n=0}^{+\infty}(F_{n-2}z^n - F_{n-1}z^n - F_nz^n) = F_0 = 1$$
   Comme dans ce cas $1-z-z^2\neq 0$ (les racines sont ici $-\alpha$ et $-\beta$), on obtient :
   $$f(z) = \frac{1}{1-z-z^2}$$

**Exercice 3**

Dans cet exercice , on se place dans l'espace vectoriel $E$ des matrices carrées réelles d'ordre 2 (2 lignes et 2 colonnes). On note $I_2$ la matrice identité de $E$.

On considère sur $E$ l'application linéaire

$$\mathrm{Tr}\begin{cases} E \to \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to a+d \end{cases}$$

(on ne demande pas de justifier le caractère linéaire de cette application).

1. Tr est une forme linéaire.
2. La dimension du noyau Ker(Tr) est 3 par le théorème du rang.

3. Pour raison de dimension $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) \oplus \mathrm{Vect}(I_2) = E$.
4. Fait en classe : si $A$ et $B$ sont 2 matrices quelconques de $E$ alors :

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$$

On considère à partir de maintenant les matrices :

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. La famille $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ est une base de l'espace $E$ : famille libre de rang 4.
6. Déterminer les produits : $E_{12}.E_{21} =_E 11$, $\quad E_{21}.E_{12} = E_{22}$, $\quad E_{12}.E_{22} = E_{1,2}$, $\quad E_{22}.E_{12} = 0$, $\quad E_{12}.E_{11} = 0$, $\quad E_{11}.E_{12} = E_{12}$.
7. On considère maintenant une application linéaire $f$ définie sur $E$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $f(I_2) = 2$ et si $A$ et $B$ sont 2 matrices quelconques de $E$ alors :

$$f(AB) = f(BA)$$

A l'aide des relations suivantes, on a : $f(E_{11}) = f(E_{22})$ et $f(E_{11}) + f(E_{22}) = 1$ donc $f(E_{11}) = f(E_{22}) = 1$ et $f(E_{12}) = f(E_{12}) = 0$ donc par prolongement linéaire : $f = \mathrm{Tr}$.