

Chapitre 18 : Produit scalaire, espaces euclidiens.

Plan

1	Produit scalaire et norme	1
2	Orthogonalité	3
3	Projection orthogonale	5
4	Hyperplans affines d'un espace euclidien	5
5	Isométries vectorielles d'un espace euclidien	7
6	Matrices orthogonales	7
7	Isométries vectorielles du plan euclidien	8

1 Produit scalaire et norme

On considère un espace vectoriel réel E .

Définition 1 *Un **produit scalaire** sur E est une application :*

$$\begin{cases} E \times E \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \rightarrow x.y \end{cases}$$

qui vérifie :

- le produit scalaire est **bilinéaire** : pour tout vecteurs x, y et z ; λ un scalaire :

$$\begin{aligned} (x + \lambda y).z &= x.z + \lambda y.z \\ x.(y + \lambda z) &= x.y + \lambda x.z \end{aligned}$$

- **symétrique** : pour tout vecteurs x et y : $x.y = y.x$
- pour tout vecteur x non nul : $x.x > 0$.

Un espace E muni d'un tel produit scalaire est appelé **espace pré-hilbertien**, **espace euclidien** s'il est de dimension finie.

Le produit scalaire est selon les cas noté $x.y$, (x, y) ou $\langle x, y \rangle$.

L'espace canonique $\mathbb{R}^n$ peut être muni du produit scalaire dit canonique :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1.y_1 + \dots + x_n.y_n$$

On parlera dans ce cas de l'**espace euclidien canonique** $\mathbb{R}^n$.

Sur l'espace des fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$: $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, on a un produit scalaire classique défini par, si f et g sont 2 fonctions de E :

$$(f, g) = \int_a^b f(t).g(t)dt = \int_a^b f.g$$

Il y en a d'autre...

On considère E un espace pré-hilbertien ou euclidien muni d'un produit scalaire $\langle x, y \rangle$.

Définition 2 *L'application*

$$\| \cdot \| \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \end{cases}$$

est la **norme** associée au produit scalaire choisi.

On pose si v, w sont dans E : $d(v, w) = \|v - w\|$ la **distance** entre les vecteurs v et w .

On a les propriétés élémentaires :

- Si x est dans E : $\|x\| = 0 \implies x = 0$;
- Pour $x \in E$ et λ réel : $\|\lambda.x\| = |\lambda|\|x\|$.

Le produit scalaire peut être retrouvé par la norme et la :

Propriété 1 (Formule de polarisation) Si x et y sont dans E :

$$2\langle x, y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2$$

Plus fondamental :

Théorème 1 (Inégalité de Cauchy Schwarz) *Pour tous vecteurs x et y dans E :*

$$-\|x\| \cdot \|y\| \leq \langle x, y \rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

avec, si y est non nul :

- égalité à droite si et seulement si il existe $\lambda \geq 0$ tel que $x = \lambda y$,
- égalité à gauche si et seulement si il existe $\lambda \leq 0$ tel que $x = \lambda y$.

Pour tous vecteurs x et y dans E :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

avec égalité si et seulement si x et y sont liés.

Et surtout :

Théorème 2 (Inégalité triangulaire) *Pour tous vecteurs x et y dans E :*

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

avec si y est non nul égalité si et seulement si il existe $\lambda \geq 0$ tel que $x = \lambda y$.

2 Orthogonalité

On considère un espace pré-hilbertien réel muni d'un produit scalaire noté $\langle x, y \rangle$.

Définition 3 *Les vecteurs x et y sont dit **orthogonaux** quand $\langle x, y \rangle = 0$. On note dans ce cas $x \perp y$.*

On a le fameux :

Théorème 3 (Théorème de Pythagore) *On a pour tout x et y dans E :*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \text{ si et seulement si } x \perp y$$

Définition 4 *Si X est une partie de E , son **orthogonal** noté $X^\perp$ est :*

$$X^\perp = \{y \in E \mid \forall x \in X : x \perp y\}$$

$X^\perp$ est un sous espace vectoriel de E .

On considère une famille $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E .

Définition 5 La famille $(x_i)_{i \in I}$ est dite **orthogonale** quand pour tout $i \neq j$ dans I :

$$x_i \perp x_j$$

orthonormale ou **orthonormée** quand, de plus, pour tout i dans I :

$$\|x_i\| = 1$$

Remarquons qu'une famille orthogonale de vecteurs non nuls ou une famille orthonormale est libre.

La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormée pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

Partant d'une famille libre, on peut construire une famille orthonormale par :

Théorème 4 (Orthonormalisation de Schmitt) Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille libre de E . Il existe une famille orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ telle que $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$. On peut même avoir :

$$\text{Vect}(e_1) = \text{Vect}(v_1), \text{Vect}(e_1, e_2) = \text{Vect}(v_1, v_2), \dots, \text{Vect}(e_1, \dots, e_n) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$$

On procède comme suit :

- On pose $e_1 = v_1$
- On pose $e_2 = v_2 + \lambda_{1,2}e_1$ de sorte que $e_2 \cdot e_1 = 0$.
- On pose $e_3 = v_3 + \lambda_{1,3}e_1 + \lambda_{2,3}e_2$ de sorte que $e_3 \cdot e_1 = 0$ et $e_3 \cdot e_2 = 0$
- et ainsi de suite jusqu'à $e_n = v_n + \lambda_{1,n}e_1 + \dots + \lambda_{n-1,n}e_{n-1}$ de sorte que $e_n \cdot e_1 = 0, \dots, e_n \cdot e_{n-1} = 0$.

On construit ainsi une famille orthogonale de vecteurs non nuls. En divisant chacun de ces vecteurs par sa norme, on construit la famille cherchée.

On obtient finalement :

Théorème 5 Tout espace euclidien admet une base orthonormée, toute famille orthonormale dans un espace euclidien peut être complétée en une base orthonormée.

On considère du coup un espace euclidien E muni d'une base orthonormée $B = (e_1, \dots, e_n)$.

Propriété 2 Dans les conditions précédentes, si v est un vecteur de E alors :

$$v = \sum_{i=1}^n \langle v, e_i \rangle e_i \quad \|v\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle v, e_i \rangle^2$$

Si dans la base B : $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$, $w = \sum_{i=1}^n \mu_i e_i$ alors :

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \mu_i = \sum_{i=1}^n \langle v, e_i \rangle \cdot \langle w, e_i \rangle$$

3 Projection orthogonale

On considère E un espace (non nécessairement de dimension finie) réel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

Théorème 6 (Projection sur un sous espace de dimension finie) *Si F est un sous espace de dimension finie, il existe une projection orthogonale de E sur F . Autrement dit, il existe un projecteur p linéaire de E d'image F , de noyau $F^\perp$.*

En particulier :

$$E = F \oplus F^\perp$$

et pour tout vecteur v de E , on a, en posant $p^\perp(v) = v - p(v)$:

$$v = p(v) + p^\perp(v) \quad \text{avec } p(v) \in F, \quad p^\perp(v) \in F^\perp \text{ et donc } p(v) \perp p^\perp(v)$$

Soit maintenant $B = (e_1, \dots, e_m)$ une base orthonormée de F .

Propriété 3 *Dans les conditions précédentes, si $v \in E$:*

$$p(v) = \sum_{i=1}^m \langle v, e_i \rangle e_i$$

$p(v)$ est l'unique vecteur de F qui minimise la distance entre F et v . En particulier :

$$d(v, p(v)) = \|v - p(v)\| = \min_{w \in F} d(v, w) = d(v, F)$$

Si E est de plus un espace euclidien (c'est à dire de dimension finie) et F est un sous espace de E :

$$\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$$

4 Hyperplans affines d'un espace euclidien

On considère ici un espace euclidien de dimension n .

Rappelons qu'un **hyperplan affine** H est un sous espace affine de E de dimension $n - 1$. Il peut être défini comme passant par un point A et dirigé par l'espace vectoriel $\text{Vect}(x_1, \dots, x_{n-1})$ où $(x_1, \dots, x_{n-1})$ est une famille libre de $n - 1$ vecteurs de E .

Propriété 4 *Si H est un hyperplan affine de E , il existe un vecteur non nul $\vec{n}$, un point A de E , un scalaire λ (non uniques) tels que l'équation de H peut s'écrire*

$$M \in H \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = \lambda$$

Dans les condition précédentes, $\vec{n}^\perp = \text{Vect}(x_1, \dots, x_{n-1})$ et on dit que $\vec{n}$ est un vecteur **normal** à H .

Réciproquement :

Propriété 5 Si un vecteur non nul $\vec{n}$, un scalaire λ et un point A sont donnés, l'ensemble des points M de E vérifiant $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = \lambda$ est un hyperplan affine de E de vecteur normal $\vec{n}$.

Plus concrètement, si on travaille dans un repère orthonormé fixé de E et si H est un hyperplan affine de E , alors l'équation de H peut s'écrire :

$$M = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in H \iff a_1.x_1 + \dots + a_n.x_n = k$$

$a_1, \dots, a_n$ non tous nuls. Dans ce cas le vecteur $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à H .

Ainsi une droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation $ax + by = c$ a pour vecteur normal le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Un plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $ax + by + cz = d$ a pour vecteur normal le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Reprenons H un hyperplan affine de E euclidien, $\vec{n}$ un vecteur normal unitaire à H et A un point de H .

Propriété 6 Si M est un point de E alors la distance entre M et H est donné par la formule :

$$d(M, H) = |\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|$$

Plus concrètement dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ euclidiens canoniques.

Si Δ est la droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation $ax + by = c$ et si M est le point : $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ alors

$$d(M, \Delta) = \frac{|a.x_0 + b.y_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Si P est le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $ax + by + cz = d$ et si M est le point : $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ alors

$$d(M, P) = \frac{|a.x_0 + b.y_0 + c.z_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

5 Isométries vectorielles d'un espace euclidien

On considère un espace euclidien E .

Définition 6 Une **isométrie vectorielle** est un endomorphisme u de E vérifiant, pour tout vecteur v de E :

$$\|u(v)\| = \|v\|$$

De manière équivalente, un endomorphisme u de E est une isométrie vectorielle si et seulement si, pour tous v et w dans E :

$$u(v).u(w) = v.w$$

Ou encore, u endomorphisme est une isométrie vectorielle si et seulement si, pour une ou toute base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$, la famille $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une base orthonormée de E .

On peut montrer qu'une application de E dans E vérifiant pour tout vecteur v de E : $\|u(v)\| = \|v\|$ est nécessairement linéaire.

Propriété 7 L'ensemble noté $O(E)$ des isométries vectorielles de E est un sous groupe du groupe linéaire $GL(E)$ appelé **groupe orthogonal** de E .

Quelques exemples importants :

Propriété 8 Si F est un sous espace de E la symétrie par rapport à E parallèlement à $F^\perp$ dite **réflexion** par rapport à F est une isométrie de E .

Si H est un hyperplan de E la symétrie par rapport à H parallèlement à $H^\perp$ dite **réflexion** par rapport à H est une isométrie de E .

6 Matrices orthogonales

Fixons $n \in \mathbb{N}$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.

Définition 7 Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **orthogonale** quand les conditions équivalentes suivantes sont réalisées :

- Les colonnes de A forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.
- Les lignes de A forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.
- On a ${}^t A.A = I_n$.
- A est inversible et $A^{-1} = {}^t A$.
- A est la matrice d'une isométrie de $\mathbb{R}^n$.

On note $O(n)$ ou $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $O(n)$ est le **groupe orthogonal** d'ordre n , c'est un sous groupe (en général non commutatif) de $GL(n, \mathbb{R})$. Le lien avec les isométries est donné par :

Propriété 9 Si E est un espace euclidien et $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E , $u \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie si et seulement si $\text{Mat}_B(u)$ est une matrice orthogonale.

7 Isométries vectorielles du plan euclidien

On considère le plan euclidien orienté canonique $\mathbb{R}^2$.

Une matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ orthogonale **positive** est la matrice d'une base orthonormée **directe** de $\mathbb{R}^2$ et donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

On note $SO(2)$ l'ensemble des telles matrices. $SO(2)$ est un sous groupe de $O(2)$.

Une matrice A de $SO(2)$ est aussi la matrice de la **rotation d'angle** θ R_θ de $\mathbb{R}^2$. On dit du coup que θ est une **mesure de l'angle orienté** entre les 2 vecteurs non nul $\vec{u}$ et $\vec{v}$ quand :

$$R_\theta \left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right) = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

Rappelons que $\mathbb{U}$ est l'ensemble des nombres complexes de module 1. On considère l'application :

$$\begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{U} & \rightarrow & SO(2) \\ \theta & \rightarrow & z = e^{i\theta} & \rightarrow & A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \end{cases}$$

Propriété 10 L'application précédente est une bijection entre $\mathbb{U}$ et $SO(2)$ qui vérifie de plus si θ et θ' sont dans $\mathbb{R}$: $A(\theta + \theta') = A(\theta).A(\theta')$

On peut ainsi retrouver (entre autres) les formules d'addition par la relation : $A(e^{i(\theta+\theta')}) = A(e^{i\theta}).A(e^{i\theta'})$.

En particulier, le groupe $SO(2)$ est commutatif. Attention, ce n'est pas le cas de $SO(3)$ ni des groupes suivants !

Concernant les isométries négatives de $\mathbb{R}^2$, on obtient de même :

Une matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ orthogonale **négative** est la matrice d'une base orthonormée **indirecte** de $\mathbb{R}^2$ et donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Une telle matrice A est aussi la matrice de la réflexion S_θ de $\mathbb{R}^2$ par rapport à la droite vectorielle D_θ faisant un angle orienté $\frac{\theta}{2}$ par rapport à la 1/2 droite $[Ox)$.

En conclusion pour $\mathbb{R}^2$:

Propriété 11 *Les isométries vectorielles de $\mathbb{R}^2$ sont les rotations vectorielles et les réflexions par rapport aux droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$.*

Savoirs

Définition d'un produit scalaire, d'une norme. Propriétés élémentaires. Inégalité de Cauchy Schwarz. Théorème de Pythagore

Savoir-faire

Orthonormalisation de Schmitt. Calcul d'une projection orthogonale, d'une décomposition dans une base orthogonale, orthonormale.