Fiche 79 : Probabilités et révisions.

Exercice 1

On considère N urnes numérotées de 1 à N. Dans l'urne $i \in [\![1, N]\!]$, il y a i boules numérotées de 1 à i. On choisit au hasard une urne puis une boule dans cette urne. On note X le numéro de la boule tirée.
Déterminer la loi de X.

Exercice 2

$N \in \mathbb{N}$ est fixé
On dispose de $(N+1)$ urnes, numérotées de 0 à N . L'urne k contient k boules rouges et $(N-k)$ boules blanches. On choisit une urne au hasard. Sans connaître son numéro, on en tire n fois de suite une boule, avec remise après chaque tirage.

1. Quelle est la probabilité que le tirage suivant donne encore une boule rouge sachant que, au cours des n premiers tirages, seules des boules rouges ont été tirées ?
2. Calculer la limite de cette probabilité lorsque N tend vers l'infini.

Exercice 3

Donner un équivalent de la suite définie pour $n \geq 2$ par :

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$

On pourra utiliser ce résultat dans les exercices qui suivent.

Exercice 4

On pose $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$.

1. Quelle est la nature de la suite $(S_n)_{n\geq 2}$. En donner un équivalent.
2. Quelle est la nature de la suite $(S_n - \ln^2(n)/2)_{n\geq 2}$.

Exercice 5

Donner un équivalent de la suite :

$$\left(\sum_{i+j=n, i\in\mathbb{N}, j\in\mathbb{N}} = \frac{1}{i \times j} \right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Exercice 6

Déterminer (on pourra utiliser les sommes de Riemann) les limites des suites suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2} e^{-\frac{n}{k}} \quad , \quad \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{1/n}$$

Exercice 7

Étudier la nature des séries :

$$\sum_{n\geq 1} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right) \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sum_{k=1}^{n} 1/k + (-1)^n}$$