

Fiche 81 : Espaces euclidiens.

Exercice 1

On considère un espace probabilisé fini Ω sans évènement non vide à probabilité nulle et sur celui ci l'espace vectoriel des variables aléatoires $E = \{X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}\}$.

1. Montrer qu'on définit un produit scalaire sur E en posant, si X et Y sont dans E :

$$(X, Y) = \mathbb{E}(X \times Y)$$

2. Déterminer la projection orthogonale de E sur $\mathbb{R}$: l'ensemble $\mathbb{R}$ des variables aléatoires constantes sur Ω ?
3. Si X est dans E , déterminer la distance entre X et $\mathbb{R}$. Comment s'appelle usuellement cette distance ?
4. Soit Y une variable aléatoire non constante sur Ω , déterminer la projection orthogonale de l'espace E sur l'espace $\text{Vect}(1, Y)$.

Exercice 2

Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ canonique, déterminer la matrice canonique de la projection orthogonale sur le plan

$$Q : x - 2y - 2z = 0$$

Exercice 3

1. Montrer : $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\sum_{i=1}^n x_i \leq \sqrt{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Étudier les cas d'égalité.

2. Soit f une application continue d'un intervalle $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\left(\int_a^b f(t) dt \right)^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(t) dt.$$

Étudier les cas d'égalité.

Exercice 4

Soit E l'espace euclidien canonique $\mathbb{R}^4$, F le sous-espace vectoriel d'équations :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 3z + 4t = 0 \end{cases}$$

1. Trouver une base orthonormée de F .
2. Donner la matrice dans $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale sur F .
3. Calculer $d(\vec{e}_1, F)$.

Exercice 5

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer que p est orthogonal (c'est-à-dire $\text{Ker}(p) \perp \text{Im}(p)$) si et seulement si : $\forall x \in E : \|p(x)\| \leq \|x\|$.

Exercice 6

Soit $\alpha = \inf \left\{ \int_0^1 (ax + b - e^x)^2 dx : a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

1. Déterminer un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(E, | \cdot |)$, un sous-espace vectoriel F de E et $v \in E$ tel que $\alpha = d(v, F)^2$.
2. Déterminer $p \in F$ tel que $\alpha = d(v, p)^2$ et α .