

## Fiche 83 : Déterminant.

### Exercice 1

Calculer  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$  et déterminer la condition d'inversibilité de la matrice.

### Exercice 2

Dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ , si  $A, B, C$  sont 3 points non alignés, montrer que  $M = (x, y, z)$  est dans le plan  $(ABC)$  si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} x_B - x_A & x_C - x_A & x - x_A \\ y_B - y_A & y_C - y_A & y - y_A \\ z_B - z_A & z_C - z_A & z - z_A \end{vmatrix} = 0$$

### Exercice 3

Soit  $(a_1, a_2, a_3) \in (\mathbb{K})^3$ . On note  $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ , et on considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$$

Calculer le produit  $AV$ , puis  $\det(AV)$  en fonction de  $\det(V)$ , et en déduire  $\det(A)$ .

### Exercice 4

Soit  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Montrer que

$$A^2 - \text{tr}(A).A + \det(A)I_2 = 0$$

### Exercice 5

Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension finie  $n$  et  $\varphi \in \mathcal{L}(E)$  telle que  $\varphi^2 = -\text{id}_E$ .

1. Donner des exemples de telles applications dans le cas  $n = 2$  ou  $4$ .
2. Montrer que de telles applications existent si et seulement si  $n$  est pair.