Fiche 84 : Déterminant.

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. A quelle condition sur $\lambda \in \mathbb{R}$ existe-t-il un vecteur v de $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ tel que $A.v = \lambda v$.
2. Déterminer les couples (λ, v) solutions du problème précédent.
3. En déduire une diagonalisation de la matrice A.

Exercice 2

On note $GL_2(\mathbb{Z}) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \text{ tq } \det M = \pm 1\}$, $SL_2(\mathbb{Z}) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \text{ tq } \det M = 1\}$.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. Démontrer que M a un inverse dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det M = \pm 1$.
2. Démontrer que les ensembles et $GL_2(\mathbb{Z})$ et $SL_2(\mathbb{Z})$ sont des groupes pour la multiplication matricielle.
3. Montrer que (a, b) un couple d'entiers constitue la première colonne d'une matrice de $SL_2(\mathbb{Z})$ si et seulement si a et b sont premiers entre eux.

Exercice 3

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \neq b$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on note B_n le déterminant suivant :

$$B_n = \begin{vmatrix} a+b & a & & 0 \\ b & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ 0 & & b & a+b \end{vmatrix}$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4,\ B_n = (a+b)B_{n-1} - abB_{n-2}$ Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2,\ B_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}.$$

Exercice 4

Soient E un ensemble quelconque et $f_1, \ldots, f_n : E \to K$ des fonctions.
Montrer par récurrence sur n que la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre dans K^E si et seulement s'il existe des éléments $x_1, \ldots, x_n$ de E tels que $\det\big(f_i(x_j)\big) \neq 0$.