Chapitre 20 : Systèmes linéaires

Plan

1 Systèmes linéaires

1.1 Définitions

On appelle **système linéaire** (S) à n **équations** et p **inconnues** à coefficients dans $\mathbb{K}$, l'étude du problème :

$$\text{Trouver les } p\text{-uples } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p \text{ vérifiant le système :}$$

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Les **coefficients** $(a_{ij})_{(1\leq i\leq n\ ,\ j\leq j\leq p)}$ ainsi que les **seconds membres** $(b_i)_{(1\leq i\leq n)}$ sont des scalaires de $\mathbb{K}$ supposés donnés.

On peut considérer la recherche des solutions de (S) comme la recherche dans $\mathbb{K}^p$ de l'intersection des n hyperplans affines dont les équations sont données par chacune des équations de (S).

Le système S est dit **homogène** quant $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$ et, s'il ne l'est pas, on définit :

$$(S_0) \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = 0 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2p}x_p = 0 \\ \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = 0 \end{cases}$$

le **système homogène associé à** (S).

La **matrice** A du système (S) ou du système homogène associé est la matrice à n lignes et p colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

En notant $Y = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, le système (S) peut simplement s'écrire :

$$A \cdot X = Y$$

Le **rang** du système noté $\mathrm{rg}(S)$ est le rang de la matrice A, il ne dépend pas des seconds membres.

Résoudre un système homogène revient à chercher le noyau de la matrice A, l'ensemble des solutions de (S_0) forme donc un sous espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$ de dimension $p - \mathrm{rg}(S)$ dite appelé **solution générale de l'équation homogène**.

On a ensuite le classique théorème de structure des solutions :

Théorème 1 *Si le système (S) a au moins une solution $(x_1, \ldots, x_n)$ dite **solution particulière**, on dit dans ce cas que le système est **compatible**, alors l'ensemble de ses solutions est l'espace affine passant par $(x_1, \ldots, x_n)$ et dirigé par $\ker(A)$:*

$$(x_1, \ldots, x_n) + \ker(A)$$

Notons en particulier que l'ensemble des solutions de (S) est ou l'ensemble vide dans le cas d'un système incompatible ou un espace affine de dimension $p - \mathrm{rg}(S)$dans le cas d'un système compatible.

Dans la pratique, on sera souvent dans le cas dit "de Cramer" :

Définition 1 *Un système linéaire est dit **de Cramer** quand de manière équivalente :*

- *Il a une et une seule solution ;*
- *Sa matrice est inversible ;*
- *Il a autant d'équations que d'inconnues et son rang est égal à son nombre d'équations.*

Dans le cas de Cramer, la résolution du système revient simplement à :

$$A \cdot X = Y \iff X = A^{-1} \cdot Y$$

Théorème 2 (Formules de Cramer) *Dans la situation précédente, on note $A = (C_1, \ldots, C_n)$ les colonnes de A et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.*

la résolution du système

$$A \cdot X = Y \iff X = A^{-1} \cdot Y$$

peut être donnée par, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$y_i = \frac{\det(C_1, \ldots, C_{i-1}, Y, C_{i+1}, \ldots, C_n)}{\det(A)} = \frac{\det(C_1, \ldots, C_{i-1}, Y, C_{i+1}, \ldots, C_n)}{\det(C_1, \ldots, C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, \ldots, C_n)}$$

Cette formule n'a qu'un intéret théorique compte tenu de la complexité du calcul des déterminants impliqués.

1.2 Opérations élémentaires

1.3 Opérations élémentaires sur les lignes

On considère une matrice A.

On note classiquement L_i sa i-ième ligne.
Rappelons les **opérations élémentaires sur les lignes** :

- Échanger 2 lignes L_i et L_j, opération notée $L_i \leftrightarrow L_j$.
- Multiplier une ligne L_i par un nombre $\lambda \neq 0$, opération notée $L_i \leftarrow \lambda \cdot L_i$.

- Ajouter la ligne λL_j à L_i pour $i \neq j$, opération notée $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

- L'opération $L_i \leftrightarrow L_j$ revient à la multiplication de A à gauche par la matrice

$$
\begin{array}{r}
\\
\\
\\
\text{i-ième ligne} \\
\\
\\
\\
\text{j-ième ligne} \\
\\
\\
\\
\end{array}
\begin{bmatrix}
1 & & & & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & & & & \\
& & 1 & & & & & & & & \\
\cdots & & & 0 & & \cdots & & 1 & & & \\
& & & & 1 & & & & & & \\
& & & & & \ddots & & & & & \\
& & & & & & 1 & & & & \\
\cdots & & & 1 & & \cdots & & 0 & & & \\
& & & & & & & & 1 & & \\
& & & & & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & & & & 1
\end{bmatrix}
$$

Elle multiplie le déterminant par (-1).

- L'opération $L_i \leftarrow \lambda \cdot L_i$ revient à la multiplication de A à gauche par la matrice :

$$
\begin{array}{r}
\\
\\
\\
i - \text{ième ligne} \\
\\
\\
\\
\end{array}
\begin{bmatrix}
1 & & & & & & \\
& \ddots & & & & & \\
& & 1 & & & & \\
& & & \lambda & & & \\
& & & & 1 & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & 1
\end{bmatrix}
$$

qui multiplie le déterminant par λ.

- L'opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ revient à la multiplication de A à gauche par la matrice :

$$
\begin{array}{r}
\\
\\
i - \text{ième ligne }, \lambda \text{ sur la } j\text{-ième colonne} \\
\\
\\
\end{array}
\begin{bmatrix}
1 & & & & \\
& \ddots & & & \\
& & 1 & \lambda & \\
& & & \ddots & \\
& & & & 1
\end{bmatrix}
$$

qui ne modifie pas le déterminant.

On dit que 2 matrices A et A' sont équivalentes en lignes si elles se déduisent l'une de l'autre par une suite de manipulations élémentaires sur les lignes. On note alors :

$$A \sim_L A'$$

Remarquons que 2 matrices équivalentes en lignes sont équivalentes au sens donné au chapitre *Matrices*.

Propriété 1 *Si 2 matrices carrées sont équivalentes en lignes alors :*

- *elles sont toutes 2 inversibles ou toutes 2 non inversibles.*
- *elles ont même noyau, même rang.*

Une matrice inversible est équivalente en ligne à la matrice identité

Une application à l'inversion des matrices :

Propriété 2 *Si la matrice A est carrée inversible d'ordre n, il existe des matrices $B_1, \dots, B_p$ (correspondant chacune à une manipulation élémentaire) tel que $B_p \cdot \dots \cdot B_1 \cdot A = I_n$. On a alors $A^{-1} = B_p \cdot \dots \cdot B_1$. Autrement dit, les opérations élémentaires sur les lignes qui mènent de la matrice A à la matrice I_n mènent parallèlement de la matrice I_n à la matrice A^{-1}.*

1.4 Opérations élémentaires sur les colonnes

On considère toujours une matrice A.

On note classiquement L_i sa i-ième ligne.
Rappelons les **opérations élémentaires sur les colonnes** :

- Échanger 2 colonnes C_i et C_j, opération notée $C_i \leftrightarrow C_j$.
- Multiplier une colonne C_i par un nombre $\lambda \neq 0$, opération notée $C_i \leftarrow \lambda \cdot C_i$.
- Ajouter la colonne λC_j à C_i pour $i \neq j$, opération notée $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$.

- L'opération $C_i \leftrightarrow C_j$ revient à la multiplication de A à droite par la matrice

$$\begin{matrix} \\ \\ \\ \text{i-ième ligne} \\ \\ \\ \\ \text{j-ième ligne} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ \cdots & & & 0 & & \cdots & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ \cdots & & & 1 & & \cdots & & 0 & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

elle multiplie le déterminant par (-1).

- L'opération $C_i \leftarrow \lambda \cdot C_i$ revient à la multiplication de A à droite par la matrice :

$$i - \text{ième ligne} \quad \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

elle multiplie le déterminant par λ.

- L'opération $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ revient à la multiplication de A à droite par la matrice :

$$i - \text{ième ligne }, \lambda \text{ sur la } j\text{-ième colonne} \quad \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & \lambda & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

qui ne modifie pas le déterminant.

On dit que 2 matrices A et A' sont équivalentes en colonnes si elles se déduisent l'une de l'autre par une suite de manipulation élémentaire sur les colonnes. On note alors :

$$A \sim_C A'$$

Remarquons que 2 matrices équivalentes en colonnes sont équivalentes au sens donné au chapitre *Matrices*.

Propriété 3 *Si 2 matrices carrées sont équivalentes en colonnes alors :*

- *elles sont toutes 2 inversibles ou toutes 2 non inversibles.*
- *elles ont même image, même rang.*

Une matrice inversible est équivalente en colonnes à la matrice identité.

Une application à l'inversion des matrices :

Propriété 4 *Si la matrice A est carrée inversible d'ordre n, il existe des matrices $B_1, \ldots, B_p$ (correspondant chacune à une manipulation élémentaire) tel que $A \cdot B_1 \cdot \cdots \cdot B_p \cdot = I_n$. On a alors $A^{-1} = B_1 \cdot \cdots \cdot B_p$. Autrement dit, les opérations élémentaires sur les colonnes qui mènent de la matrice A à la matrice I_n mènent parallèlement de la matrice I_n à la matrice A^{-1}.*

2 Pivot de Gauss

On rappelle quelques points sur l'**algorithme de Gauss** ou **Pivot de Gauss** dans le cas de l'inversion d'une matrice (supposée inversible). Des méthode analogues permettent de résoudre tout système linéaire.

Triangulation de la matrice :

Considérons la première colonne, on choisit un de ses coefficients non nul disons a_{i1} :

- pour la théorie, le premier peut convenir.
- pour un calcul "à la main", on choisit celui dont l'inverse est le plus simple à calculer.
- les logiciels de calcul numérique choisissent le plus grand en valeur absolue pour minimiser les erreurs d'approximations.

On divise la ligne L_i par a_{i1} et on la place en première ligne : $L_i \leftarrow a_{i1}^{-1} L_i$, $L_i \leftrightarrow L_1$.

On procède ensuite aux manipulations élémentaires :

$$L_k \leftarrow L_k - a_{k1} L_1 \qquad \text{pour } 2 \leq k \leq n$$

Constatons qu'à l'issue, on a construit une matrice A_1 équivalente en ligne à A et telle que :

- Le premier terme de la première colonne est un 1.
- En dehors de ce 1, tous les termes de la première colonne sont nuls .

On continue ensuite le même processus avec la deuxième colonne de A_1 en laissant de côté la ligne L_1 puis la deuxième, etc....

On fini en au plus autant de tels processus que A a de lignes avec une matrice $A_n \sim_L A$ triangulaire avec des 1 sur la diagonale (on appelle ces 1 les **pivots**).

Dans le cas où A n'est pas inversible, on est conduit à un moment à une division par 0.

Réduction de la matrice triangulaire :

Considérons maintenant la dernière ligne L_n de A_n . Son dernier terme non nul est un 1. On procède aux manipulations élémentaires :

$$L_k \leftarrow L_k - a_{kn} L_n \qquad \text{pour } 1 \leq k \leq n-1$$

Constatons qu'à l'issue, on a construit une matrice A_{n+1} équivalente en ligne à A_n et tel que, en dehors du pivot de la dernière ligne, tous les coefficients de la dernière colonne sont nuls.

On continue, avec le pivot de l'avant dernière colonne pour annuler les coefficients se trouvant "au dessus" et ainsi de suite en remontant les lignes de la matrice pivot par pivot pour, par manipulations sur les lignes, se ramener à la matrice identité.

Théorème 3 *Le pivot de Gauss fournit un algorithme de :*

- *Évaluation du caractère compatible ou non d'un système linéaire ;*
- *Résolution complète d'un système linéaire ;*
- *Calcul du rang d'une matrice ;*
- *Évaluation du caractère inversible ou non d'une matrice carrée.*
- *Calcul le cas échéant de l'inverse d'une matrice carrée inversible.*

.