Fiche 86 : Révisions.

Exercice 1

On considère les matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = I + N.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ calculer $\det(A^n)$.
2. Calculer N^2 et N^3.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donner le rang de N^n et celui de A^n.
4. En utilisant 1., donner, en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de la matrice $M(n) = A^n$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, justifier la formule $(A^n)^{-1} = M(-n)$. Expliquer et justifier l'écriture : $A^n = M(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2

Soit E un espace euclidien de dimension n. Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire de matrice U dans une base orthonormée $\mathcal{B}$.

1. Montrer que U^tU est la matrice dans $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale sur $\mathrm{vect}(\vec{u})$.
2. Trouver la matrice de la symétrie associée.

Exercice 3

On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel. Soit $H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tq } a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\}$ où $a_1, \ldots, a_n$ sont des réels donnés non tous nuls. Chercher la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur H.