Sup MPSI, Lycée Jean Perrin, 17 Juin 2024.

Concours blanc, Eléments de correction.

1 Géneralisations des puissances de matrices

On considère l'ensemble $\mathcal{N}$ des matrices de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ ainsi que $\mathcal{U}$ l'ensemble des matrices dites *unipotentes* de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $U = I + N$ où $N \in \mathcal{N}$ et $I = I_3$ est la matrice identité de $\mathbb{R}^3$.

1. On pose

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

(a) $\det(B^n) = 1$

(b) $\ker(A - I) = \mathrm{Vect}((1, 1, 1))$
$e_1 = (1, 1, 1)$

(c) $e_2 = (0, -1, 0)$
$e_3 = (0, -2, -1)$ dans $\mathbb{R}^3$ tel que

$$f(e_2) = 2e_1 + e_2 \quad , \quad f(e_3) = -2e_2 + e_3$$

(d)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. $\det(A^n) = 1$.

3. (a) $\mathcal{N}$ est un sous espace vectoriel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de base les matrices élémentaires $E_{12}, E13, E_{23}$, dimension 3.

(b) $\mathcal{N}$ est stable par produit c'est à dire que si $N \in \mathcal{N}$ et $M \in \mathcal{N}$ alors $N.M \in \mathcal{N}$ (*Calcul à faire*)

(c) $M^3 = 0$ pour $N \in \mathcal{N}$.

4. (a) L'ensemble $\mathcal{U}$ n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$: il ne contient pas le vecteur nul!!

(b) $\mathcal{U}$ contient I et est stable par produit. De plus si $N = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ alors N est inversible et $N^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & ac - b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}$.

$\mathcal{U}$ est un sous groupe de $GL_3(\mathbb{R})$ où $GL_3(\mathbb{R})$ est le groupe des matrices inversibles de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

5. Soit $U \in \mathcal{U}$ et $N \in \mathcal{N}$ tel que $U = I + N$. On rappelle que U est inversible. .
   Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose :
$$U^{(\alpha)} = I + \alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}N^2$$
   On prendra garde au fait que $U^{(\alpha)}$ tel que défini est une notation, ce n'est pas une puissance.
   (a) Par la formule du binôme, sachant $N^3 = 0$: $n \in \mathbb{N}$ et U^n désigne la puissance *classique* alors
$$U^{(n)} = U^n$$
   (b) Montrer si $n \in \mathbb{N}$ et U^{-n} désigne la puissance *classique* alors
$$U^{(-n)} = U^{-n}$$
   car $U^{(-n)} \times U^n = I$.
   (c) Si α et β sont réels alors
   $U^{(\alpha)}U^{(\beta)} = (I + \alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}N^2)(I + \beta N + \frac{\beta(\beta-1)}{2}N^2) = I + (\alpha+\beta)N + \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)}{2}N^2$.
   $(U^{(\alpha)})^{(\beta)} = (I + \alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}N^2)^{(\beta)} = I + \beta(\alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}N^2) + \frac{\beta(\beta-1)}{2}(\alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}N^2)^2$
   $(U^{(\alpha)})^{(\beta)} = I + \beta\alpha N + (\beta\frac{\alpha(\alpha-1)}{2} + \frac{\beta(\beta-1)}{2}\alpha^2)N^2$
   $(U^{(\alpha)})^{(\beta)} = I + \beta\alpha N + \frac{\alpha\beta(\alpha\beta-1)}{2}N^2$
$$U^{(\alpha)}.U^{(\beta)} = U^{(\alpha+\beta)} \quad \text{et} \quad (U^{(\alpha)})^{(\beta)} = U^{(\alpha\beta)}$$
6. $C = B^{(1/2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
7. Par changement de base $D = PCP^{(-1)}$ vérifie : $D^2 = A$: $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$.

2 Somme des coefficients d'une matrice orthogonale

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice orthogonale de $M_n(R)$ avec $n \geq 2$, c'est-à-dire vérifiant $AA^T = A^TA = I_n$. Le but de l'exercice est d'établir une majoration de la valeur absolue de la somme S des coefficients de la matrice orthogonale A, c'est à dire du nombre
$$|S| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$
On note par ailleurs, $<,>$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ et U le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. Par Cauchy-Schwarz appliqué aux vecteurs AU et U, de norme $\sqrt{n}$ on a :
$$|<AU, U>| \leq n.$$
2. $<AU, U>$ est la somme des coefficients de la matrice A donc :
$$|S| \leq n$$
3. Pour la matrice identité : $|S| = n$.

4. On étudie le cas d'égalité en dimension 2.
   (a) Cf. cours : les formes possibles des matrices orthogonales de rang 2 sont
   $$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$
   où θ est réel.
   (b) En considérant les matrices précédentes, on obtient les matrices
   $$I_2, -I_2, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

3 Probabilités

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On considère une urne contenant n boules indiscernables numérotées de 1 à n.
On tire au hasard une boule puis on la retire de l'urne ainsi que toutes les boules ayant un numéro supérieur à celui de la boule tirée. On réitère l'expérience jusqu'à ce que l'urne soit vide et on note X_n la varible aléatoire égale au nombre de tirages réalisé pour vider l'urne.
Pour un entier i, on notera N_i la variable aléatoire égale au numéro de la i-ième boule tirée s'il y a eu au moins i tirages et 0 sinon.

1. $\mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(X_2 = 2) = \frac{1}{2}$. $\mathbb{E}(X_2) = \frac{3}{2}$ $V(X_2) = \frac{1}{4}$.
2. $\mathbb{P}(X_3 = 1) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(X_3 = 2) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(X_3 = 3) = \frac{1}{6}$. $\mathbb{E}(X_3) = 11/6$.
3. $X_n \in \{1, ..n\}$.
4. $\mathbb{P}(X_n = 1) = 1/n$ et $\mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n!}$.
5. Si on premier tirage, on tire à boule i, on est ramené à la même expérience avec une urne remplie jusqu'à la boule $i-1$, ainsi par les probas totales, si $k \geq 2$:
   $$\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{n} \sum_{i=2}^{n} \mathbb{P}(X_{i-1} = k - 1)$$
6. $$\begin{aligned}
(n+1)\mathbb{E}(X_{n+1}) - n\mathbb{E}(X_n) &= (n+1)\sum_{k=1}^{n+1} k\mathbb{P}(X_{n+1} = k) - n\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X_n = k) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} k \sum_{i=2}^{n+1} \mathbb{P}(X_{i-1} = k-1) - \sum_{k=1}^{n+1} k \sum_{i=2}^{n} \mathbb{P}(X_{i-1} = k-1) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} k \sum_{i=2}^{n+1} \mathbb{P}(X_{i-1} = k-1) - \sum_{k=1}^{n+1} k \sum_{i=2}^{n} \mathbb{P}(X_{i-1} = k-1) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} k\mathbb{P}(X_n = k-1) \\
&= \sum_{k=2}^{n+1} k\mathbb{P}(X_n = k-1) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (k+1)\mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{E}(X_n) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{E}(X_n) + 1
\end{aligned}$$

Montrer que

$$(n+1)\mathbb{E}(X_{n+1}) - n\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_n) + 1$$

puis que

$$\mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{E}(X_n) + \frac{1}{n+1}$$

7. $\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
8. Si $n \geq 2$:

$$\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$$

Fait en classe

9. $\mathbb{E}(X_n) \sim \ln(n)$ pour $n \to \infty$.

4 Séries et fonctions

On rappelle que si $k \leq n$ sont des entiers naturels :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

1. $c_0 = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = 2$.
2. Avec la définition : si $k \in \mathbb{N}$:

$$(4k+2)c_k = (k+2)c_{k+1}$$

3. Si $n \in \mathbb{N}$, par développement : $c_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$.
4. Par la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, c_n est un entier naturel.
5. $\frac{c_{k+1}}{c_k} = \frac{2(2k+1)}{k+2}$.
L'inégalité proposée revient à montrer :

$$4\left(\frac{k}{k+1}\right)^3 \leq \frac{(2k+1)^2}{(k+2)^2} \leq 4\left(\frac{k+1}{k+2}\right)^3$$

qui s'obtient par réduction au même dénominateur et développement.

$$4\left(\frac{k}{k+1}\right)^{3/2} \leq \frac{c_{k+1}}{c_k} \leq 4\left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{3/2}$$

puis que si $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{4}\frac{4^n}{n\sqrt{n}} \leq c_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{4^n}{n\sqrt{n}}$$

On pose pour $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k} \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^{n} k c_k c_{n-k}$$

6. En posant $i = n - k$ dans la somme qui définit T_n :

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} (n-k) c_k c_{n-k} = nS_n - T_n$$

$T_n = \frac{n}{2} S_n$.

7.

$$c_{n+1} + 4T_n + 2S_n = c_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} (4k+2) c_k c_{n-k} = c_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} (k+2) c_{k+1} c_{n-k}$$

$$... = c_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} (k+1) c_k c_{n+1-k} = \sum_{k=0}^{n+1} (k+1) c_k c_{n+1-k}$$

$$c_{n+1} + 4T_n + 2S_n = T_{n+1} + S_{n+1}$$

8. On montre alors par récurrence que si $n \in \mathbb{N}$: $c_{n+1} = S_n$. En effet dans ce cas en utilisant la question 2. :

$$S_{n+1} = c_{n+1} + 4T_n + 2S_n - T_{n+1} = S_n + 4\frac{n}{2} S_n + 2S_n - \frac{n+1}{2} S_{n+1}$$

$$S_{n+1} = \frac{2(2n+3)}{n+3} S_n = \frac{2(2n+3)}{n+3} c_{n+1} = c_{n+2}$$

On a ainsi montré que si $n \in \mathbb{N}$:

$$c_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}$$

9. Si $x \in [-1/4, 1/4]$, la série $\sum_{n \geq 0} c_n x^n$ est absolument convergente par comparaison aux séries de Riemann.

On pose pour $x \in [-1/4, 1/4]$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{et} \quad g(x) = 2x f(x)$$

On admet que la fonction f est continue sur $[-1/4, 1/4]$.

10. En utilisant un produit de Cauchy, si $x \in [-1/4, 1/4]$:

$$(f(x))^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k} \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{n-1}$$

11. Si $x \in [-1/4, 1/4]$:
La relation précédente entraine : $(2xf(x))^2 = 4x \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = 4xg(x) - 4x$:

$$(g(x))^2 = 2g(x) - 4x$$

Par résolution de l'équation : il existe une fonction ϵ définie sur $[-1/4, 1/4]$ à valeurs dans $\{-1, 1\}$ telle que :
si $x \in [-1/4, 1/4]$:

$$g(x) = 1 + \epsilon(x)\sqrt{1 - 4x^2}$$

12. Si $x \in]-1/4, 1/4[$:

$$\epsilon(x) = \frac{g(x) - 1}{\sqrt{1 - 4x^2}}$$

ce qui montre que ϵ est continue sur $]-1/4, 1/4[$, constante d'après le théorème des valeurs intermédiaires car à valeurs dans $\{-1, 1\}$. De plus $\epsilon(0) = -1$.

13. Finalement : $\forall x \in [-1/4, 1/4]$:

$$g(x) = 1 - \sqrt{1 - 4x^2}$$